Approximation of Sets Based on Partial Covering

doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Csajbók Zoltán

Témavezető: Dr. Mihálydeák Tamás CSc
Prof. Dr. Pethő Attila

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Informatikai Tudományok Doktori Iskola

Debrecen, 2011

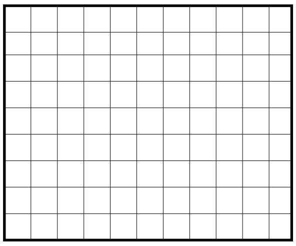
Tartalomjegyzék

Problémafelvetés

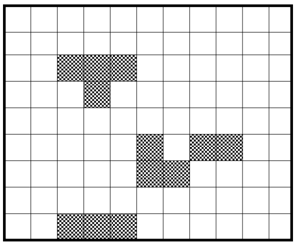
Az értekezés tárgya halmazok közelítése. Elsőként Z. Pawlak lengyel matematikus vetette fel az 1980-as évek elején,[1] hogy mi történne akkor, ha egy alaphalmaz részhalmazait az alaphalmaz előre megadott részhalmazaival közelítenénk.

Pawlaknál ez az előzetesen rögzített *alaprendszer* az alaphalmazon értelmezett ekvivalenciareláció által generált ekvivalenciaosztályok összessége (1. ábra). Az egy ekvivalenciaosztályba tartozó objektumok a rendelkezésünkre álló ismeretek birtokában *megkülönböztethetetlenek*.

Az alaprendszer elemeiből *jól definiált* halmazok származtathatók (2. ábra).

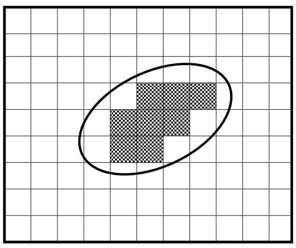


1. ábra. Az alaprendszer (Pawlak)

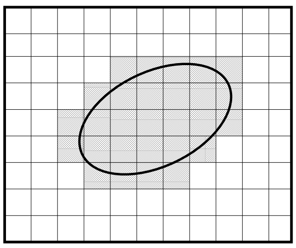


2. ábra. Jól definiált halmazok (Pawlak)

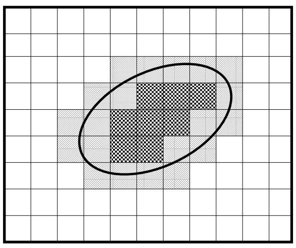
Ekkor a jól definiált halmazok segítségével a halmazok *alsó* (3. ábra) és *felső közelítése* (4. ábra) képezhető.



3. ábra. Alsó közelítés (Pawlak)



4. ábra. Felső közelítés (Pawlak)



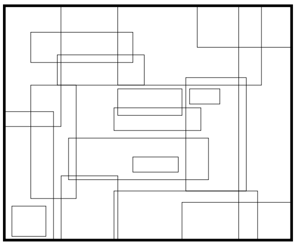
5. ábra. Alsó-felső közelítés (Pawlak)

[1] Rough Set Theory (RST) – közelítő halmazelmélet. Pawlak úttörő munkáinak jegyzéke, valamint további részletes irodalmi hivatkozások az értekezés részét képezik.

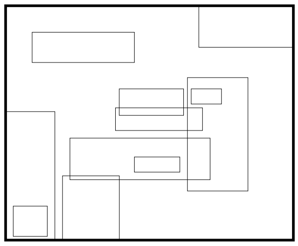
Egy halmaz alsó és felső közelítésével jellemezhető. A halmaz *éles*, ha a kettő megegyezik. A Pawlak-féle közelítő halmazelmélet fontos jellegzetes tulajdonsága, hogy az „élesség” és a „jól definiáltság” fogalma egybeesik.

A közelítő halmazelméletben a közelítésre használt halmazok ekvivalenciaosztályok, amelyek páronként diszjunktak és lefedik a teljes alaphalmazt. Az elmélet egy lehetséges általánosítása, ha feloldjuk a páronkénti diszjunktságot (6. ábra). Ennek részletes kidolgozása megtalálható az irodalomban.

A dolgozat fő kérdése az, hogy mi történik akkor, ha nemcsak a páronkénti diszjunktságot, hanem a teljes lefedést is feladjuk (7. ábra). Az így létrejött rendszer neve *parciális lefedésen alapuló halmazközelítés.* Legáltalánosabb szinten csak azt az elengedhetetlen kitételt tesszük, hogy *bármely halmaz alsó közelítése legyen része felső közelítésének.*



6. ábra. A diszjunkság feloldása



7. ábra. A lefedés feladása: parciális alaprendszer

A DISSZERTÁCIÓ RÖVID VÁZLATA. Dolgozatomban először megfogalmazom az általánosítás minimum követelményrendszerét (Chapter 3).[2] Megmutatom, hogy mind a Pawlak-féle (Section 4.1), mind a parciális lefedésen alapuló halmazközelítés (Section 5.4) kielégíti azt. Áttekintem, hogy a parciális lefedésen alapuló alsó-felső közelítések tulajdonságai hogyan változnak a Pawlak-féle közelítések „megszokott” sajátosságaihoz képest (Chapter 5). Külön fejezetben tárgyalom a Galois kapcsolatra vonatkozó eredményeket (Chapter 6). Végül példákkal szemléltetem az új megközelítés gyakorlati vonatkozásait (Chapter 7).

[2]Itt és a továbbiakban a zárójelbe tett hivatkozások a dolgozat megfelelő részére történő utalások.

Általános halmazközelítő keretrendszer

Az általánosított közelítő tér

Legyen a rögzített *alaprendszer* az alaphalmaz nemüres részhalmazainak tetszőleges nemüres rendszere. Az alaprendszer elemei *jól definiáltak*. A jól definiált halmazokról legáltalánosabban csak annyit tételezünk fel, hogy az üres halmaz, továbbá az alaprendszer elemei jól definiáltak.

A különböző halmazközelítő rendszerek vizsgálata során arra a megállapításra jutottam, hogy az alsó-felső közelítő leképezésekkel szemben támasztott *minimum követelmények* a következők (Definition 3.8):

(C0) (*Definiáltság*) Az alsó és felső közelítés jól definiált halmaz.

(C1) (*Montonitás*) Bővebb halmaz alsó és felső közelítése is bővebb.

(C2) (*Üres halmaz normálása*) Üres halmaz alsó közelítése üres halmaz.

(C3) (*Granularitás*) Jól definiált halmaz alsó közelítése önmaga.

(C4) (*A közelítés alaptulajdonsága*) Bármely halmaz alsó közelítése mindig része felső közelítésének.

A (C0)–(C4) feltételek mindegyike független a több négytől (Example 3.10).

A (C0) és (C3) feltételek fontos következménye, hogy egy halmaz pontosan akkor jól definiált, ha alsó közelítése önmaga (Proposition 3.9, (3)).

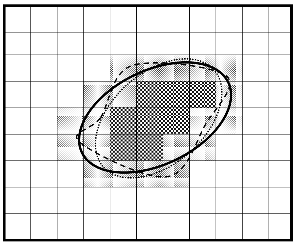
Az alaphalmazt, az alaprendszert, valamint az alsó és felső közelítéseket együttesen *általánosított közelítő térnek* nevezzük.

Egy halmaz *éles*, ha alsó és felső közelítése megegyezik. Jól definiált halmaz nem feltétlen éles. Másrészt egy éles halmaz csak akkor lesz szükségképpen jól definiált, ha alsó közelítése alulról, felső közelítése pedig felülről korlátozza (Proposition 3.16). Következésképpen az „élesség” és a „jól definiáltság” fogalma általánosított közelítő terekben általában *elválik egymástól.*

A közelítő halmazelmélet rekonstruálása

A klasszikus Pawlak-féle közelítő halmazelméletben az alaprendszer az ekvivalenciaosztályok halmaza (az alaphalmaz partíciója), a jól definiált halmazok pedig az ekvivalenciaosztályok tetszőleges egyesítése.

A Pawlak-féle alsó-felső közelítések kielégítik a (C0)–(C4) minimum követelményeket (Section 4.1).



8. ábra. Közelítő halmaz

Alsó közelítés: azon ekvivalenciaosztályok egyesítése, amelyek részei a közelítendő halmaznak.

Felső közelítés: azon ekvivalenciaosztályok egyesítése, amelyeknek a közelítendő halmazzal vett metszete nem üres.

Nyilvánvaló (8. ábra), hogy több halmaznak is megegyezik az alsó és felső közelítése. Ugyanazon alsó-felső közelítő párhoz tartozó halmazok összessége a *közelítő halmaz* (rough set).

A szakirodalom a Pawlak-féle tér tulajdonságait kizárólag pontszerűen (halmazok elemeivel) bizonyítja. Több állításra nem-pontszerű bizonyítást adtam (Proposition 4.4, 4.14, 4.16, 4.18).

Saját eredmények. Az általánosított közelítő tér fogalmának első változata a [3] cikkemben jelent meg. Jelenlegi formájában [6]-ban publikáltam (közös munka Mihálydeák Tamással). Az általánosított közelítő térben rekonstruált közelítő halmazelmélet néhány tulajdonságának nem pontszerű bizonyítását [3], [9] és [10] cikkeim tartalmazzák.

Halmazok közelítése parciális lefedésben

A továbbiakban feltételezzük, hogy jól definiált halmazok egyesítése is jól definiált.

Speciális alaprendszerek

A következő speciális alaprendszerek segítségével a Pawlak-féle elmélet bizonyos tulajdonságai részben megőrizhetők:

- *egyszeres rétegű alaprendszer*: bármely jól definiált halmaz *legalább egy* elemét az alaprendszer egyetlen tagja fedi le;

- *egyrétegű alaprendszer*: bármely jól definiált halmaz *minden* elemét az alaprendszer egyetlen tagja fedi le.

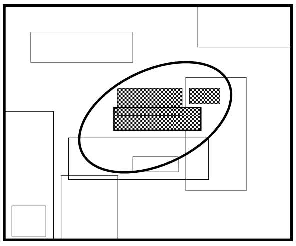
Az alaprendszer hatványhalmaza és a jól definiált halmazok között pontosan akkor létesíthető kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, ha az alaprendszer egyszeres rétegű (Proposition 5.3). Ekkor ez a leképezés egyben rendezéstartó izomorfizmus (Proposition 5.5).

Alsó-felső közelítések parciális lefedésben

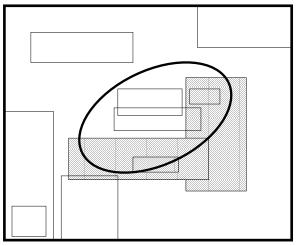
Parciális lefedésben az alsó-felső közelítések a megfelelő Pawlak-féle fogalmak közvetlen általánosításai:

- *alsó közelítés*: az alaprendszer mindazon tagjainak egyesítése, amelyek részei a közelítendő részhalmaznak (9. ábra).

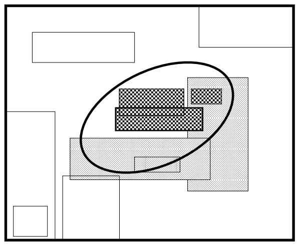
- *felső közelítés*: az alaprendszer mindazon tagjainak egyesítése, amelyeknek a közelítendő részhalmazzal vett metszete nemüres (10. ábra).



9. ábra. Alsó közelítés (parciális lefedésben)



10. ábra. Felső közelítés (parciális lefedésben)



11. ábra. Alsó-felső közelítés (parciális)

Az így definiált alsó-felső közelítések kielégítik az általános halmazközelítő keretrendszer (C0)–(C4) minimum követelményeit (Proposition 5.7).

Parciális lefedésben az alaphalmaz, az alaprendszer, valamint az alsó és felső közelítő leképezések közös neve *parciális közelítő tér*.

A definíciókból azonnal következik, hogy az alsó közelítés mindig része a közelítendő halmaznak. A felső közelítések viszont akkor és csak akkor fedik le a közelítendő halmazokat, ha maga az alaprendszer lefedi az alaphalmazt (Proposition 5.7).

Egy halmaz pontosan akkor jól definiált, ha alsó közelítése önmaga (Proposition 5.9). Azonban egy jól definiált halmaz is általában többféleképpen állítható elő az alaprendszer tagjaiból. Ha az előállítás egyértelmű, akkor azt mondjuk, hogy a jól definiált halmaz az alaprendszerre vonatkozóan *reprezentálható*. Minden jól definiált halmaz pontosan akkor reprezentálható, ha az alaprendszer egyszeres rétegű (Proposition 5.11).

Saját eredmények. Az alaprendszer, illetve a speciális alaprendszerek fogalmát először [3]-ban definiáltam. Szintén itt jelent meg elsőként az alsó-felső közelítések definíciója parciális lefedésben. A fogalmak lényegesen bővebb kifejtését és további eredményeket az [1] cikkem tartalmazza.

Galois kapcsolatok

Reguláris Galois kapcsolatok

Az irodalomban széles körben vizsgálják a Galois kapcsolatokat. Egy lehetséges definíciója a következő. A $(P, \leq_P)$ és $(Q, \leq_Q)$ két részbenrendezett halmaz között az $f : P \to Q$ és $g : Q \to P$ leképezések reguláris *Galois kapcsolatot*[3] alkotnak, ha

(1) a $g \circ f$ szorzat extenzív, azaz $p \leq_P g(f(p))$ minden $p \in P$ esetén;

(2) az $f \circ g$ szorzat kontraktív, azaz $f(g(q)) \leq_Q q$ minden $q \in Q$ esetén;

(3) f és g monoton (rendezéstartó).

Ha két részbenrendezett halmaz között Galois kapcsolat létesíthető, akkor ennek elméleti szempontból a legfontosabb következménye az, hogy az *egyik* rendszerben teljesülő tulajdonságok átvihetők a *másik* rendszerbe.

A közelítő halmazelméletben jól ismert tény, hogy a Pawlak-féle felső és alsó közelítések[4] Galois kapcsolatot alkotnak az alaphalmaz hatványhalmazán. A hatványhalmaz részbenrendezése a halmazelméleti tartalmazás.

A Galois kapcsolatok informatikai jelentőségére tekintettel fontos annak tisztázása, hogy a parciális lefedésben definiált felső-alsó közelítések vajon Galois kapcsolatot alkotnak-e.

A probléma megoldásához pontról pontra megvizsgáltam a Galois kapcsolat fenti meghatározásában szereplő kikötések teljesülésének feltételeit a parciális lefedésben definiált felső és alsó közelítésekre vonatkozóan.

A vizsgálatokban a felső közelítés játsza az f, az alsó közelítés a g leképezés szerepét.

(Proposition 6.1) *A parciális lefedésben definiált alsó-felső közelítések szorzata pontosan akkor extenzív, ha az alaprendszer lefedi az alaphalmazt.*

[3] Az elnevezés onnan ered, hogy a XIX. század 30-as éveinek elején E. Galois volt az első, aki az algebrában a testbővítések során a közbülső testek és a Galois-csoport részcsoportjai között hasonló jellegű összefüggéseket vizsgált. Száz évvel később a fogalom általánosításában úttörő szerepet játszott G. Birkhoff és O. Ore. A Galois kapcsolatoknak ma kiterjedt alkalmazása van az informatikában.

[4] Mivel a Galois kapcsolat nem szimmetrikus a leképezésekre nézve, ezért fontos a közelítések sorrendje.

(Proposition 6.7) *A parciális lefedésben definiált felső-alsó közelítések szorzata pontosan akkor kontraktív, ha az alaprendszer tagjai páronként diszjunktak.*

A felső-alsó közelítések monotonitása következik definíciójukból. Ebből és az előző két állításból együttesen pedig dolgozatom egyik fő eredményét kapjuk.

(Theorem 6.8) *A parciális lefedésben definiált felső-alsó közelítések akkor és csak akkor alkotnak Galois kapcsolatot, ha az alaprendszer az alaphalmaz partíciója.*

Parciális Galois kapcsolat

Parciális lefedésben a közelített halmaz nem feltétlen része felső közelítésének (10. ábra). Szélsőséges esetben nemüres halmaz felső közelítése az üres halmaz. Ez mindig így van, ha a közelített halmaznak nincs közös része az alaprendszer egyetlen tagjával sem.

Megvizsgálam, hogy mi történik akkor, ha a felső közelítő leképezést csak azokra a halmazokra értelmezzük, amelyek részei felső közelítésüknek. Így a felső közelítés az alaphalmaz hatványhalmazán értelmezett *parciális leképezéssé* válik. Mindez nem érinti az alsó közelítés definícióját, az továbbra is teljes. Kérdés, hogy a parciális felső és a teljes alsó leképezés pár alkothat-e Galois kapcsolatot valamilyen értelemben? A válaszhoz mindenekelőtt a Galois kapcsolat megfelelően módosított fogalma szükséges, ami megtalálható az irodalomban (Definition 2.4).

Ez alapján a következőket kell bizonyítani:

(1) A parciális felső közelítés monoton.

(2) A teljes alsó közelítés monoton.

(3) A parciális felső és a teljes alsó közelítő leképezés szorzata teljes leképezés az alaphalmaz hatványhalmazán.

(4) Az alaphalmaz tetszőleges X, Y részhalmaza esetén, feltéve, hogy X-nek értelmezett a felső közelítése, teljesülni kell:

X felső közelítése az Y része $\Leftrightarrow$ X az Y alsó közelítésének része.

(1) és (2) azonnal következik a megfelelő leképezések definíciójából.

(3) fennállását a következő állítás igazolja.

(Proposition 6.14) *A parciális lefedésben definiált parciális felső és a teljes alsó közelítő leképezés szorzata az alaphalmaz valamennyi részhalmazán értelmezett.*

(4) teljesülését két lépésben vizsgáltam.

(Proposition 6.15) *Legyen X, Y az alaphalmaz két tetszőleges részhalmaza úgy, hogy az X-nek értelmezett a felső közelítése.*

Ha X felső közelítése az Y része $\Rightarrow$ X az Y alsó közelítésének része.

(Proposition 6.18) *Legyen X, Y az alaphalmaz két tetszőleges részhalmaza úgy, hogy az X-nek értelmezett a felső közelítése.*

Az

X az Y alsó közelítésének része $\Rightarrow$ X felső közelítése az Y része

akkor és csak akkor igaz, ha az alaphalmaz tagjai páronként diszjunktak.

Az előző állításokkal teljessé vált második fő eredményem bizonyítása.

(Theorem 6.19) *A parciális lefedésben definiált parciális felső és teljes alsó közelítések pontosan akkor alkotnak parciális Galois kapcsolatot, ha az alaprendszer tagjai páronként diszjunktak.*

Saját eredmények. A reguláris Galois kapcsolatokra vonatkozó első eredményeim [8]-ban jelentek meg. Az alaprendszer egyszeres rétegű tulajdonságának feltételezése mellett [3]-ban bizonyítottam a parciális Galois kapcsolatokkal összefüggő állításokat. [1]-ben mind a reguláris, mind a parciális Galois kapcsolatokra vonatkozó tételeket általánosítottam, és azokat tetszőleges parciális lefedésen alapuló közelítő terekre bizonyítottam.

Alkalmazások

Magyarország élőhelyeit leíró MÉTA adatbázis elemzésének halmazközelítésen alapuló modellje

2003 és 2006 között az ún. MÉTA program (Magyarország Élőhelyeinek Térképi Adatbázisa) keretében Magyarország teljes területére kiterjedő felmérés készült az ország nagyléptékű aktuális élőhely-térképének elkészítésére.

Az adatgyűjtés térbeli alapegységei az ország területét lefedő 35 hektáros szabályos MÉTA hatszögek voltak. A felmérés kiterjedt az elkövetkező 10-15 évben előre látható *veszélyeztető tényezők* számbavételére is.

Az alaphalmaz a MÉTA hatszögek halmazainak halmaza. Gyűjtsük egybe azokat a hatszögeket, amelyekben egy kiválasztott veszélyeztető tényező fellép. Készítsük el ezeket valamennyi veszélyeztető tényezőre.

Az előbb vázolt modell formálisan a Pawlak-féle közelítő halmazelmélet *és* a parciális lefedésen alapuló közelítésekkel írható le:

- A MÉTA hatszögek halmaza Magyarország területének partíciója, egy Pawlak-típusú közelítés *alaprendszere*.
- Magyarország tetszőlegesen kijelölt területére a MÉTA hatszögekkel *Pawlak-típusú közelítések* adhatók.
- A MÉTA hatszögek hatványhalmaza alaphalmaznak tekinthető. Ebben a veszélyeztető tényezőkhöz tartozó hatszöghalmazok egy parciális lefedésen alapuló közelítés *alaprendszerét* alkotják.
- A Pawlak-féle közelítésekkel kapott alsó és felső közelítések MÉTA hatszögek halmaza. Ezekre a veszélyeztető tényezők által generált általánosított közelítő térben *parciális lefedésen alapuló közelítések* adhatók.

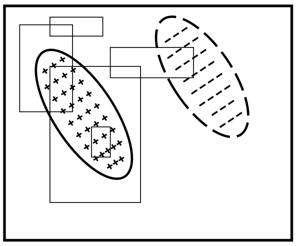
Általános eszköz-alapú közelítő modell

Tegyük fel, hogy objektumok egy halmazát vizsgáljuk, és ebben adott egy *pozitív* és egy *negatív* referencia halmaz. A két halmazzal kapcsolatban csak annyi a kikötés, hogy nem üresek és nincs közös elemük.

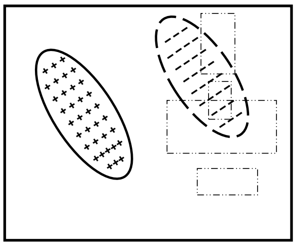
Tegyük fel továbbá, hogy a vizsgált halmazban rendelkezésünkre áll két halmazrendszer. Nevük legyen *pozitív eszközök* és *negatív eszközök*.

Feltételezzük, hogy mindkét halmazrendszer bármely tagja esetén *könnyen eldönthető*, hogy egy objektum hozzátartozik vagy sem.

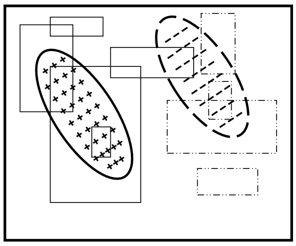
Az alapszituációt a következő ábrák szemléltetik.



12. ábra. Pozitív eszközök



13. ábra. Negatív eszközök



14. ábra. Pozitív és negatív eszközök

A pozitív és negatív halmazrendszerek diszjunktak, de mind a pozitív, mind a negatív eszközöknek lehet közös elemük. A vizsgált teljes objektumhalmazt önmagában egyik sem fedi le. Következésképpen a két halmazrendszer egy pozitív és egy negatív parciális közelítő tér alaprendszerének tekinthető. Képezhető tehát a referencia halmazok parciális lefedésén alapuló alsó-felső közelítése a pozitív, illetve negatív eszközökre vonatkozóan.

Segítségükkel a referencia halmazok és az eszközök viszonya – az induktív logikai programozásból kölcsönzött terminológia szerint – a következőképpen jellemezhető. A pozitív referencia halmaz

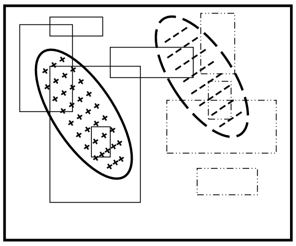
- *komplett*, ha a pozitív eszközök lefedik (azaz része a pozitív eszközökre vonatkozó felső közelítésének), egyébként *inkomplett*;

- a negatív eszközökre vonatkozóan *konzisztens*, ha a negatív eszközökkel nincs közös része (azaz a negatív eszközökre vonatkozó felső közelítése az üres halmaz), egyébként *inkonzisztens*.

Ez alapján egy pozitív referencia halmaz lehet

- *komplett* és *konzisztens* a negatív eszközökkel;
- *komplett* és *inkonzisztens* a negatív eszközökkel;
- *inkomplett* és *konzisztens* a negatív eszközökkel;
- *inkomplett* és *inkonzisztens* a negatív eszközökkel.

Hasonlóan jellemezhető a negatív referencia halmaz is. Így elvben a két referencia halmaz együttesen $4 \cdot 4 = 16$-féleképpen írható le. Ezek közül azonban a pozitív-negatív eszközök diszjunktsága miatt néhány eset nem fordulhat elő. Mind a 16 eset vizsgálata megtalálható a dolgozatban.



A pozitív referencia halmaz *komplett* és *konzisztens* a negatív eszközökkel.

A negatív referencia halmaz *inkomplett* és *inkonzisztens* a pozitív eszközökkel.

15. ábra. A referencia halmazok jellemzése

Az eddigiekben vázolt modell a következő három lépésben alkalmazható:

- **1. lépés:** A referencia halmazok (in)komplett, illetve (in)konzisztens jellegének megállapítása.
- **2. lépés:** A pozitív-negatív eszközök újraépítése az inkonzisztenciák feloldásával és az inkomplett régiók megszüntetésével.
- **3. lépés:** Az újraépített eszközök alkalmazása egy objektumhalmaz „kiértékelésére" a pozitív és negatív közelítő terekben *egyidejűleg.*

Az 1. és 3. lépés *formálisan* kivitelezhető a parciális közelítő terekben. A 2. lépés végrehajtása a vizsgált tárgyterülettől függő *szakértői döntéseket* igényel. Ilyen például annak megítélése, hogy adott esetben a referencia halmaz minősíti az eszközöket vagy fordítva, az eszközök a referencia halmazt.

A 3. lépésben a kiértékelt objektumhalmaz – szakértői döntéstől függően – tekinthető új (pozitív vagy negatív) eszköznek vagy egyesíthető a (pozitív vagy negatív) referencia halmazzal. Ezzel az algoritmus újraindulhat az első lépéstől. Így a pozitív-negatív eszközrendszer dinamikusan változhat, folyamatosan igazodva az újonnan felmerülő tényekhez.

Számítógépes rendszerekbe történő behatolást detektáló modell

Ennél a modellnél a előző fejezetben kifejtett általános eszköz-alapú modell közvetlen alkalmazása történik.

A számítógépes rendszerek működését kívülről észlelhető *nyomsorozatokkal* modellezzük. Egy nyomsorozat a rendszer által kibocsátott és a felhasználó által kívülről megfigyelhető véges számú *elemi akciók* lineáris elrendezése. Az elemi akciók háromféle típusát különböztetjük meg: kívánt, nem biztonságos (kockázatos) és semleges. Feltesszük, hogy a három akcióhalmaz páronként diszjunkt.

Számítógépes rendszerekbe történő behatolást detektáló (IDS – Intrusion Detection System), vagy általánosabban számítógépek biztonságos működését felügyelő monitoring rendszer tervezésére két alapvető stratégia létezik.

Az első szerint a rendszer *elvárt* viselkedését állapítják meg (profilírozzák), és minden ettől eltérő működést *anomáliaként* azonosítanak. A másik megközelítés szerint a *váratlan* viselkedést profilírozzák.

A kétféle szemlélet kiegészíti egymást, de nehezen egyeztethető össze a mögöttük meghúzódó formális modell. Az általános eszköz-alapú modell természetes módon *egyidejűleg* képes kezelni mind a kettőt.

Az alaphalmaz az elemi akciók véges sorozatainak halmaza. A rendszer *elvárt* viselkedését a pozitív referencia halmaz modellezi, amelynek nyomsorozataiban csak kívánt vagy semleges elemi akciók szerepelnek.

A pozitív referencia halmazon kívül minden más nyomsorozat rendellenesnek, *anomáliának* minősül. A rendelkezésre álló ismeretek birtokában azonban az anomáliáknak csak egy része profilírozható a rendszer *váratlan* viselkedéseként, amelyet a negatív referencia halmaz modellez. Elemei általában tartalmaznak kockázatos elemi akciót is, de nem feltétlenül.

Az elvárt/váratlan viselkedések a *számítógépes alkalmazások szándékolt – kívülről megfigyelhető, észlelhető – működéséből származtathatók.*

Professzionális környezetben a számítógépes rendszer működésének elvárt/váratlan viselkedését *biztonsági politikák* rögzítik. A biztonsági politikák általánosabb szintű biztonsági stratégiába ágyazódnak, amely viszont része egy még általánosabb stratégia hierarchiának.

A biztonsági politikák tehát nem a számítógépes alkalmazásokból, hanem *egy szervezet működésének általános célrendszeréből vezethetők le.*

A biztonsági politikák egyrészt *előírják* a rendszer *elfogadható* viselkedését, másrészt *megtiltják* az *elfogadhatatlan* viselkedéseket. Az előző viselkedéseket pozitív eszközként, az utóbbiakat negatív eszközként modellezzük.

Összességében, alkalmazható az előző fejezetben tárgyalt általános eszköz-alapú közelítő modell. Következésképpen a várt/váratlan, illetve az elfogadható/elfogadhatatlan viselkedésekből kiindulva a modell algoritmusa szerint két parciális közelítő tér képezhető a véges nyomsorozatok halmazán. A számítógépes rendszer kívülről megfigyelhető nyomsorozatainak halmaza *egyidejűleg* értékelhető ki mindkét térben.

Saját eredmények. A MÉTA programhoz kapcsolódó modell az [1] cikkemben jelent meg. A behatolás detektáló modellt [4]-ben és [5]-ben publikáltam. Az előbbi elsősorban professzionális, az utóbbi pedig személyes (nem professzionális) környezetben működő számítógépes rendszerekre vonatkozik. Mindkettő általánosított modelljét a [2] cikk írja le (közös munka Mihálydeák Tamással).

The Problem

The subject of the dissertation is the set approximation. First, in the early 1980's,[5] Z. Pawlak raised the question what would happen if the subsets of a ground set should be approximated by a beforehand predefined family of subsets of the ground set itself.

According to Pawlak's idea, this predefined *base system* is the family of equivalence classes generated by an equivalence relation defined on the ground set. Objects belonging to an equivalence class are *indiscernible.*

Well defined sets can be formed from the members of the base system (Fig. 1).

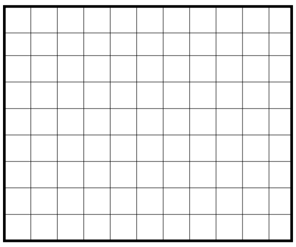


Fig. 1. The base system (Pawlak)

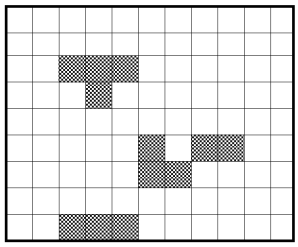


Fig. 2. Well defined sets (Pawlak)

Then, *lower* (Fig. 3) and *upper* (Fig. 4) approximations of the sets can be formed by the help of the well defined sets.

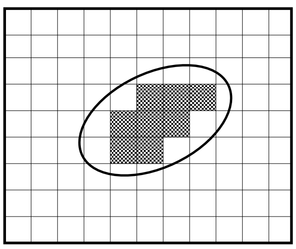


Fig. 3. Lower approximation (Pawlak)

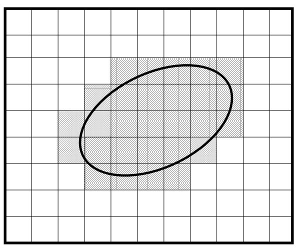


Fig. 4. Upper approximation (Pawlak)

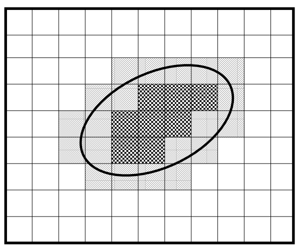


Fig. 5. Lower and upper approximation (Pawlak)

[5]Rough Set Theory. Detailed references to Pawlak's seminal papers and additional other papers can be found in the thesis.

Sets can be characterized by its lower and upper approximations. A set is *crisp*, if the two are identical. An important feature of Pawlak's rough set theory is that the notion of "crisp" and "well defined" coincide.

In the rough set theory, the sets used for approximation are the equivalence classes which are pairwise disjoint and cover the ground set. If we give up the requirement of the pairwise disjoint property, we get a possible generalization of the theory (Fig. 6). Its detailed elaboration can be found in the literature.

The main question of the thesis is what would happen if we gave up not only the pairwise disjoint property but also the covering of the ground set (Fig. 7.). In the thesis we examine the properties of the approximation of sets under these unusual conditions. The resulting system is called the *approximation of sets based on partial covering.* At the most general abstraction level, we make the only essential condition that *the lower approximation of any set must be included in its upper approximation.*

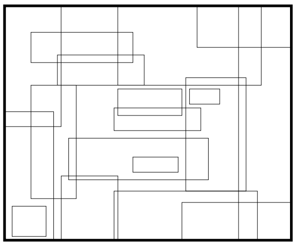


Fig 6. Giving up the pairwise disjoint property

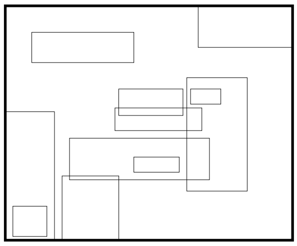


Fig. 7. Giving up the covering: partial base system

A BRIEF OUTLINE OF THE THESIS. In the thesis, first, we formulate the minimal requirements as against the generalization of lower and upper approximations (Chapter 3).[6] We show that both Pawlak's rough set theory (Section 4.1) and the approximation of sets based on partial covering (Section 5.4) meet these requirements. We enlarge on how the properties of the lower and upper approximations based on partial covering change compared to Pawlak's usual ones (Chapter 5). In a separate chapter we discuss the results concerning the Galois connections (Chapter 6). Finally, we illustrate the practical implications of the new approach with a few examples (Chapter 7).

[6]Hereafter the references in parentheses are the references to the suitable part of the thesis.

General Set Approximation Framework

Generalized Approximation Spaces

Let the fixed *base system* be a nonempty family of nonempty subsets of the ground set. The members of the base system are *well defined*. The empty set is also considered to be a well defined set. There may exist additional well defined sets.

According to the examination of different set approximation systems we have determined the minimum requirements against as the lower and upper approximations:

(C0) (*Definability*) Lower and upper approximations are well defined.

(C1) (*Monotonicity*) Lower and upper approximations of a larger set is larger.

(C2) (*Normality*) The lower approximation of the empty set is the empty set.

(C3) (*Granularity*) The lower approximation of a well defined set is itself.

(C4) (*Approximation property*) Lower approximations of sets are included in their upper approximations.

Each condition (C0)–(C4) is independent of the other four (Example 3.10).

The ground set, the base system and the lower and upper approximations together are called the *generalized approximation space.*

A set is *crisp*, if its lower and upper approximations coincide. A well defined set is not necessarily crisp. On the other hand, a crisp set is necessarily well defined only if it is bounded by its lower and upper approximations (Proposition 3.6). Consequently, the notions of “crisp” and “well defined” in general are not synonymous to each other in generalized approximation spaces.

Reconstruction of Rough Set Theory

In Pawlak's classic rough set theory the base system is the family of equivalence classes (the partition of the ground set) and the well defined sets are any unions of the equivalence classes.

The lower and upper approximations of Pawlak's type meet the (C0)–(C4) minimal requirements (Section 4.1).

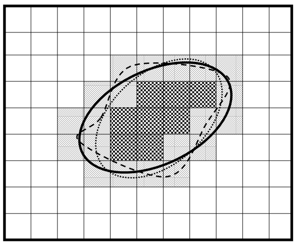


Fig. 8. Rough set

Lower approximation: the union of all equivalence classes which are the subsets of the set to be approximated.

Upper approximation: the union of all equivalence classes which have a nonempty intersection with the set to be approximated.

Clearly (Fig. 8), a number of sets have the same lower and upper approximations. The *rough set* is the family of those sets which have the same lower and upper approximation pair.

In the literature, the properties of Pawlak's rough set theory are proved solely in the point-wise manner (with elements of sets). We have provided new point-free proofs for a few of them (Proposition 4.4, 4.14, 4.16, 4.18).

My own results. The first version of the notion of the generalized approximation space appeared in my paper [3]. In its present form was published in [6] (joint work with Tamás Mihálydeák). Point-free proofs of a few properties of the rough set theory reconstructed in the generalized approximation space can be found in my papers [3], [9] and [10].

Approximation of Sets Based on Partial Covering

In the sequel, we suppose that any unions of well defined sets are well defined as well.

Special Base Systems

Some properties of the rough set theory can partly be preserved with the help of the following constrained versions of the base system:

- *single-layered based system*: every nonempty well defined set has *at least one element* which is covered by exactly one member of the base system;
- *one-layered base system*: *all elements* of every nonempty well defined set are covered by exactly one member of the base system.

A bijection can be established between the power set of the base system and the family of well defined sets if and only if the base system is single layered (Proposition 5.3). Then, this bijection is order-preserving (Proposition 5.5).

Lower and Upper Approximations Based on Partial Covering

Lower and upper approximations based on partial covering are the straightforward generalization of Pawlak's lower and upper approximations:

- *lower approximation*: the union of all members of the base system which are the subsets of the set to be approximated (Fig. 9);
- upper approximation: the union of all members of the base system which have a nonempty intersection with the set to be approximated (Fig. 10).

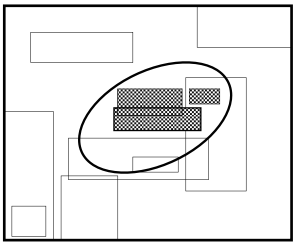


Fig. 9. Lower approximation (partial)

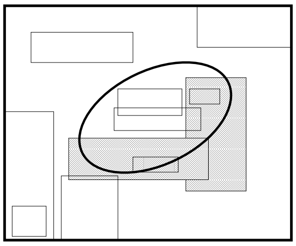


Fig. 10. Upper approximation (partial)

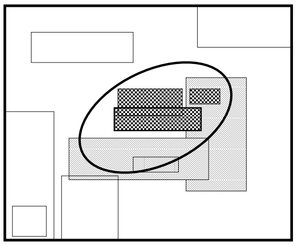


Fig. 11. Lower and upper approximations (partial)

The previously defined lower and upper approximations based on partial covering meet the (C0)–(C4) minimal requirements (Proposition 5.7).

Relying on partial covering, the ground set, the base system and the lower and upper approximations together are called the *partial approximation space*.

The definitions immediately imply that the lower approximation is always included in the set to be approximated. However, upper approximations cover all the sets to be approximated if and only if the base system covers the ground set (Proposition 5.7).

A set is well defined if and only if its lower approximation is itself (Proposition 5.9). However, there may exist two or more families of the members of the base system in such a way that their unions form the same well defined set. If exactly one such family exists, it is said that the well defined set is representable with respect to the base system. Every well defined set is representable if and only if the base system is single-layered (Proposition 5.11).

My own results. The notion of the base system and its special variants were first defined in my paper [3]. The first definition of the lower and upper approximations based on partial covering appeared in this paper too. A more detailed description of those notions and further results can be found in [1].

Galois Connections

Regular Galois Connections

In the literature, Galois connections are extensively studied. A possible definition of this notion is the following. Let $(P, \leq_P)$ and $(Q, \leq_Q)$ be two partial ordered sets. The maps $f : P \to Q$ and $g : Q \to P$ form a regular Galois connection,[7] if

(1) its composition $g \circ f$ is extensive, i.e. $p \leq_P g(f(p))$ for all $p \in P$;

(2) its composition $f \circ g$ is contractive, i.e. $f(g(q)) \leq_Q q$ for all $q \in Q$;

(3) f and g are monotone (order-preserving).

If there exists a Galois connection between two partial ordered sets, the two maps between them enable us to move forth and back between the two different structures. This is one of the most important consequences of Galois connections.

In Pawlak's rough set theory, it is a well known fact that the upper and lower approximations[8] form a Galois connection on the power set of the base set. The partial ordering on the power set is given by the set theoretic inclusion relation.

With regard to the informatics significance of the Galois connection, it is important to clarify whether upper and lower approximations can form a Galois connection.

To solve this problem, we have examined the (1)–(3) requirements point by point with reference to the upper and lower approximations based on partial covering in order to determine whether under what conditions they form a Galois connection.

In our investigations, the upper approximation has played the role of the map f, whereas the lower approximation has played the role of the map g.

[7] Originally, in the early 1830's, E. Galois studied a similar connection between the intermediate fields of a field extension and the subgroups of Galois group concerning the field extension. A hundred years later, G. Birkhoff and O. Ore were the pioneers in the generalization of this notion. Nowadays, Galois connections can be found in various settings in theoretical computer science.

[8] Since Galois connections are not necessarily symmetric, the order of the maps is important.

(Proposition 6.1) *The composition of lower and upper approximations based on partial covering is extensive if and only if the base system covers the ground set.*

(Proposition 6.7) *The composition of upper and lower approximations based on partial covering is contractive if and only if the members of the base system are pairwise disjoint.*

The monotonicity of upper and lower approximations immediately follows from their definitions. This fact and the above two statements imply one of the main result of our thesis.

(Theorem 6.8) *The upper and lower approximations based on partial covering form a Galois connection if and only if the base system is the partition of the ground set.*

Partial Galois Connection

Relaying on partial covering, the set to be approximated is not necessarily included in its upper approximation (Fig. 10). In some extreme cases, the empty set may be the upper approximation of certain nonempty subsets of the ground set. This is the case when the set to be approximated and the base system are disjoint.

We have examined what happens when upper approximations are only defined for sets which are included in their upper approximations. In this case the upper approximation becomes a *partial map* on the power set of the ground set. Of course, the lower approximation remains a total map. The question is whether the partial upper approximation map and the total lower approximation map may form a Galois connection in some sense. To answer this question, first of all, we need a suitable modified notion of the Galois connection. Actually, there is such a modified definition of the Galois connection in the literature (Definition 2.4).

Based on this definition we need to prove the following:

(1) The partial upper approximation is monotone.

(2) The total lower approximation is monotone.

(3) The composition of the partial upper approximation and the total lower approximation is a total map on the power set of the base set.

(4) For all subsets X and Y of the base set, provided that the upper approximation of X is defined, the following assertion must be held:

$$\text{the upper approximation of } X \text{ is a subset of } Y$$
$$\Leftrightarrow X \text{ is a subset of the lower approximation of } Y.$$

(1) and (2) follows immediately from the corresponding definitions.
The following statement confirms (3).

(Proposition 6.14) *The composition map of the partial upper and total lower approximations based on partial covering is a total map on the power set of the ground set.*

We have investigated the fulfillment of (4) in two phases.

(Proposition 6.15) *Let X and Y be the subsets of the base set in such a way that the upper approximation of X is defined. Then,*

the upper approximation of X is a subset of Y
$\Rightarrow$ X is a subset of the lower approximation of Y.

(Proposition 6.18) *Let X and Y be the subsets of the base set in such a way that the upper approximation of X is defined.*
The statement

X is a subset of the lower approximation of Y
$\Rightarrow$ the upper approximation of X is a subset of Y

holds if and only if the members of the base set are pairwise disjoint.

According to the statements above, our second main result has been completed.

(Theorem 6.19) *The partial upper and total lower approximations based on partial covering form a partial Galois connection if and only if the members of the base system are pairwise disjoint.*

My own results. The first results concerning regular Galois connections were published in [8]. The statements for partial Galois connections provided that the base system is single-layered were proved in [3]. The statements concerning both regular and partial Galois connections were generalized for arbitrary approximation spaces based on partial covering in [1].

Applications

On the MÉTA Program in Connection with the Set Approximation

The MÉTA program is a grid-based, landscape-ecology-oriented, satellite-image supported field vegetation mapping method of Hungarian habitats (MÉTA stands for Magyarországi Élőhelyek Térképi Adatbázisa: GIS Database of the Hungarian Habitats). It was carried out between 2003 and 2006.

The basic units of the data collection were the hexagons. The *hexagon grid* consists of cells of 35 hectares covering the whole territory of Hungary comprehensively. The survey expanded on the consideration of the threatening factors which were expected to threat the survival and maintenance of the habitat type in the hexagons in the next 10-15 years.

Let us consider the set of MÉTA hexagons and assemble the hexagons in which a selected threatening factor occurs. Let us prepare the families of such hexagons for all threatening factors.

The previously outlined model can be described by Pawlak's rough set theory *and* the approximation of sets based on partial covering as follows.

- The ground set is the territory of Hungary. The set of MÉTA hexagons is a partition of the territory of Hungary. So, it can be seen as a *base system* of Pawlak's type approximations.
- Any designated area of Hungary can be approximated by *Pawlak's rough set theory* with the help of the base system defined previously.
- The power set of MÉTA hexagons can also be considered as a ground set. In this ground set, the families of sets concerning the threatening factors form a *base system* for a partial approximation space.
- The lower and upper approximations obtained by Pawlak's rough set theory consist of sets of MÉTA hexagons. For these sets of hexagons, lower and upper approximations can be performed in the *partial approximation space generated by the threatening factors.*

A General Tool-Based Approximation Framework

We want to investigate a set of objects in which a *positive* reference set and a *negative* reference set are given. The only requirement for these reference sets is that they are disjoint. In addition let us suppose that we have two families of sets called *positive tools* and *negative tools* at our disposal.

Note that, the *positive* and *negative* adjective claim nothing else but that the positive reference set (resp., positive tools) and the negative reference set (resp., negative tools) are well separated.

It is assumed that it is *easy* to decide whether an object belongs to a positive tool (resp., negative tool) or not.

The basic situation is depicted by the following figures.

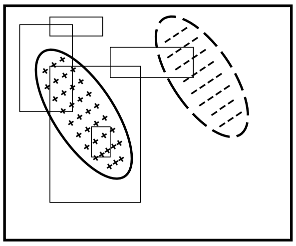


Fig. 12. Positive tools

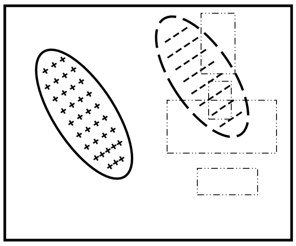


Fig. 13. Negative tools

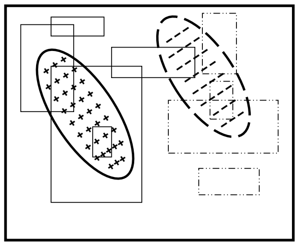


Fig. 14. Positive and negative tools

The positive and negative tools are also disjoint, but different positive tools (reps., negative tools) may have common elements. In themselves, neither positive nor negative tools covers the examined set of objects. Consequently, these two families of sets can be considered as the base systems of a positive and a negative partial approximation space. Therefore, the lower and upper approximations of the positive and negative reference sets can be formed in the positive and negative approximation spaces at the same time.

With the help of positive and negative approximation spaces, borrowing the terminology from the inductive logic programming, the mutual relationship between reference sets and tools can be characterized as follows.

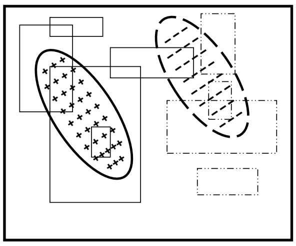
The positive reference set is

- *complete*, if it is covered by the positive tools (i.e. it is included in its upper approximation in the positive approximation space), otherwise it is *incomplete*;
- *consistent* with respect to the negative tools, if it has no common part with the negative tools (i.e. its upper approximation in the negative approximation space is the empty set), otherwise it is *inconsistent*.

According to the previous definitions, a positive reference set may be

- *complete* and *consistent* with respect to the negative tools;
- *complete* and *inconsistent* with respect to the negative tools;
- *incomplete* and *consistent* with respect to the negative tools;
- *incomplete* and *inconsistent* with respect to the negative tools.

Similar specifications can be defined to the negative reference set. From a pure combinatorial point of view, there may be in sum $4 \cdot 4 = 16$ different situations. However, by the constraints that the positive and negative reference sets are disjoint, and the positive and negative tools are disjoint, some of them are impossible. The examination of all possible cases can be found in the thesis.



The positive reference set is *complete* and *consistent* with respect to the negative tools.

The negative reference set is *incomplete* and *inconsistent* with respect to the positive tools.

Fig. 15. The characterization of reference sets

The outlined framework can be used in three consecutive steps:

- **Step 1.** Justifying reference sets to reveal their (in)consistencies and/or (in)complete regions.
- **Step 2.** Rebuilding positive and negative tools to resolve inconsistencies and eliminate incomplete regions.
- **Step 3.** Applying rebuilt tools in the positive and negative approximation spaces to justify any set of objects at the same time.

Step 1 and 3 can be carried out *formally* in the partial approximation spaces. However, the execution of Step 3 requires domain expert decisions depending on the examined field. For instance, the judgement whether the reference set justifies the tools, or vice versa, the tools justify the reference set demands a domain expert decision depending on the concrete situation.

In Step 3, a justified set of objects can be considered a (positive or negative) tool or it may be added to the (positive or negative) reference set depending on the domain expert decision. Then, the algorithm may restart from Step 1. And so, both positive and negative tools may change dynamically adapting continuously to the emerging facts.

The Intrusion Detection System (IDS) Model

In this model we apply the general tool-based model explained in the previous section to an Intrusion Detection System model.

We model a computer system as a semantic system model, a so-called *trace-based model.* We focus solely on externally observable traces sent out by the observed computer system. A trace consists of linearly ordered externally observable *atomic actions* of finite number. We distinguish three types of atomic actions: *required*, *unsafe* (risky) and *neutral.* We assume that the three action sets are pairwise disjoint.

To design an *Intrusion Detection System* (IDS) or, in general, a monitoring system which supervises the safe operation of computers, there are two basic strategies. The first is that the *expected* behaviors of the system are profiled, all other behaviors which deviate from the defined profile are declared as *anomalies.* According to another strategy, the *unexpected* behaviors are profiled directly.

The two approaches complement each other, but the formal models behind them are hard to put together. However, the general tool-based model enables to manage them at the same time.

Let the ground set be the set of finite sequences of atomic actions called traces. We model the expected behaviors as a positive reference set. Traces belonging to the positive reference set may consist of only required or neutral atomic actions.

All other traces out of the positive reference set are declared as anomalies. However, according to the available knowledge, only a part of the anomalies can be profiled as *unexpected* behaviors. We model the unexpected behaviors as a negative reference set. Its elements may contain unsafe atomic actions, but not necessarily.

The expected/unexpected behaviors of the system can be derived from the *intended, externally observable behaviors of the computer applications.*

In professional environment, the expected/unexpected behaviors of computer systems are specified in *security policies.* The security policies are embedded in a more general security strategy which, in turn, is a part of a much more general strategy hierarchy.

In other words, the security policies can be derived not from the computer applications but *the general business target system.*

The security policies, on one hand, *prescribe* the *acceptable* behaviors, on the other hand, *proscribe* the *unacceptable* behaviors. We model the acceptable behaviors as positive tools, whereas the unacceptable behaviors as negative tools.

Finally, we apply the general tool-based model to the IDS model described above. Thus, setting out from the sets of expected/unexpected and acceptable/unacceptable behaviors, two partial approximation spaces can be established on the set of traces with the help of the algorithm of the general tool-based model. Then, any set of externally observable traces of the computer systems can be justified in the two approximation spaces *at the same time*.

My own results. The model related to the MÉTA program appeared in [1]. The model for Intrusion Detection Systems was published in [4] and [5]. The former mainly refers to professional, whereas the latter mainly refers to non-professional computer environment. The generalization of both models are described in [2] (joint work with Tamás Mihálydeák).

Publikációs lista / List of papers

[1] CSAJBÓK, Z.: *Approximation of sets based on partial covering*, Theoretical Computer Science, Rough Sets and Fuzzy Sets in Natural Computing Special Issue, Volume 412, Issue 42, pp. 5820 - 5833, 2011. (Impact Factor = 0.838)

ISSN 0304-3975, DOI: 10.1016/j.tcs.2011.05.037

Also published in ScienceDirect

Reviewed by Zentralblatt für Mathematik

Indexed by Scopus

Available at `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397511004555`

[2] CSAJBÓK, Z., MIHÁLYDEÁK, T.: *A General Tool-Based Approximation Framework Based on Partial Approximation of Sets*, in S. O. Kuznetsov, D. Slezak, D. H. Hepting, B. G. Mirkin, Eds.: Proceedings of 13th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets and Granular Computing (RSFDGrC-2011), June 25-27, 2011, Moscow, Russia, Lecture Notes in Computer Science Series, Lecture Notes in Artificial Intelligence Subseries, Volume 6743, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 52–59, 2011.

ISBN: 978-3-642-21880-4, ISSN 0302-9743
DOI: 10.1007/978-3-642-21881-1_10

Indexed by ACM Digital Library, Scopus

Available at
`http://www.springerlink.com/content/61r6g15v51831614/`

[3] CSAJBÓK, Z.: *Partial Approximative Set Theory: A Generalization of the Rough Set Theory*, in: T. Martin, A. K. Muda, A. Abraham, H. Prade, A. Laurent, D. Laurent, V. Sans, Eds.: Proceedings of the International Conference of Soft Computing and Pattern Recognition (SoCPaR 2010), December 7-10, 2010., Cergy Pontoise / Paris, France, IEEE Press, pp. 51–56, 2010.

ISBN 978-1-4244-7897-2, DOI:10.1109/SOCPAR.2010.5686424

Indexed by IET Inspec, Scopus

Also published in IEEE Xplore Digital Library

Available at `http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=5686424#`.

[4] CSAJBÓK, Z.: *Simultaneous Anomaly and Misuse Intrusion Detections Based on Partial Approximative Set Theory*, in: Y. Cotronis, M. Danelutto, G. A. Papadopoulos, Eds.: Proceedings of the 19th International Euromicro Conference on Parallel, Distributed and Network-based Processing (PDP 2011), 9-11 February 2011, Ayia Napa, Cyprus, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, pp. 651–655, 2011.

ISBN 978-1-4244-7895-8, ISSN 1066-6192, DOI:10.1109/PDP.2011.47

Indexed by IET Inspec, Scopus

Also published in IEEE Xplore Digital Library

Available at `http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=5739062`.

[5] CSAJBÓK, Z.: *A Security Model for Personal Information Security Management Based on Partial Approximative Set Theory*, in: M. Ganzha, M. Paprzycki, Eds.: Proceedings of the International Multiconference on Computer Science and Information Technology (IMCSIT 2010), October 18-20, 2010., Wisła, Poland, vol. 5, Polish Information Processing Society, Katowice, Poland – IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, USA, pp. 839–845, 2010.

ISBN 978-1-4244-6432-6, ISSN 2157-5525, DOI:10.1109/PDP.2011.47

Indexed by IET Inspec, DBLP, Scopus

Also published in IEEE Xplore Digital Library

Available at
`http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=5739062`.

[6] Csajbók, Z., Mihálydeák, T.: *On the general set theoretical framework of set approximation*, Proceedings of the 3rd Rough Set Theory Workshops 2011, 14-16 September 2011, Milan, Italy, pp. 12-15, 2011.

[7] Mihálydeák, T. Csajbók, Z.: *Partial logic to investigate the logical behavior of different systems of approximations of sets*, Proceedings of the 3rd Rough Set Theory Workshops 2011, 14-16 September 2011, Milan, Italy, pp. 47-51, 2011.

[8] Csajbók, Z.: *Partial Approximative Set Theory: A View from Galois Connections*, in A. Egri-Nagy, E. Kovács, G. Kovásznai, G. Kusper, T. Tómács, Eds.: Proceedings of the 8th International Conference on Applied Informatics (ICAI 2010), January 27–30, 2010, Eger, Hungary, UNIDEB Faculty of Informatics – Eszterházy Károly College, Debrecen, Eger, pp. 53–60, 2011.

ISBN 978-963-9894-72-3

[9] Csajbók, Z.: *On the Partial Approximation of Sets*, Acta Medicinae et Sociologica, Debreceni Egyetem, Orvos- és Egészségtudományi Centrum, Egészségügyi Kar, Nyíregyháza, Vol. 2, No. 2, pp. 143-152, 2011.

ISSN 2062 0284

[10] Csajbók, Z.: *Rudiments of Partial Approximative Set Theory* (in Hungarian), in: K. Vincze, Ed.: Proceedings of the 3rd International Doctoral (PHD/DLA) Conference, 20 November 2009, Nyíregyháza, Hungary, Szent Atanáz Görög Katolikus Hittudományi Főiskola, Nyíregyháza, Hungary, pp. 117–120, 2009.

ISBN 978-963-87809-6-6.

[11] Csajbók, Z.: *On the mappings of elliptic curves defined over* $\mathbb{Q}$ *into* $[0,1)^2$, Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, **23**(2), pp. 115–123, 2007

Reviewed by Zentralblatt für Mathematik

Indexed by Scopus

ISSN 1786-0091

Available at `http://www.emis.de/journals/AMAPN/vol23_2/amapn23_12.pdf`.

Előadások / List of talks

[5] CSAJBÓK, Z., MIHÁLYDEÁK, T.: *On the general set theoretical framework of set approximation*,

The 3rd Rough Set Theory Workshop 2011, 14-16 September 2011, Milan, Italy

[6] MIHÁLYDEÁK, T. CSAJBÓK, Z.: *Partial logic to investigate the logical behavior of different systems of approximations of sets*,

The 3rd Rough Set Theory Workshop 2011, 14-16 September 2011, Milan, Italy

[1] CSAJBÓK, Z., MIHÁLYDEÁK, T.: *A General Tool-Based Approximation Framework Based on Partial Approximation of Sets*

13th International Conference on Rough Sets, Fuzzy Sets and Granular Computing (RSFDGrC-2011), June 25-27, 2011, Moscow, Russia

[3] CSAJBÓK, Z.: *Simultaneous Anomaly and Misuse Intrusion Detections Based on Partial Approximative Set Theory*

The 19th International Euromicro Conference on Parallel, Distributed and Network-based Processing (PDP 2011), 9-11 February 2011, Ayia Napa, Cyprus

[2] CSAJBÓK, Z.: *Partial Approximative Set Theory: A Generalization of the Rough Set Theory*

International Conference of Soft Computing and Pattern Recognition (SoCPaR 2010), December 7-10, 2010., Cergy Pontoise / Paris, France

[4] CSAJBÓK, Z.: *A Security Model for Personal Information Security Management Based on Partial Approximative Set Theory*

International Multiconference on Computer Science and Information Technology (IMCSIT 2010), October 18-20, 2010., Wisła, Poland

[7] CSAJBÓK, Z.: *Partial Approximative Set Theory: A View from Galois Connections*

The 8th International Conference on Applied Informatics (ICAI 2010), January 27–30, 2010, Eger, Hungary

[8] CSAJBÓK, Z.: *A parciális halmazelmélet alapelvei (Rudiments of Partial Approximative Set Theory)* (in Hungarian)

III. Nemzetközi Doktori (PHD/DLA) Konferencia (The 3rd International Doctoral (PHD/DLA) Conference), 2009. november 20, Nyíregyháza, Hungary