



Sejtautomaták szociodinamikai alkalmazásai

Doktori (Ph.D.) értekezés

Kocsis Gergely

Témavezetők:

Dr. Sztrik János

Dr. Kun Ferenc

Debreceni Egyetem
Természettudományi Doktori Tanács
Informatikai Tudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2012

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Informatikai Tudományok Doktori Iskola Informatikai Rendszerek és Hálózatok programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem informatikai tudományok doktori (Ph.D.) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2012. július 2.

Kocsis Gergely

Tanúsítom, hogy Kocsis Gergely doktorjelölt 2007-2012 között a fent megnevezett Doktori Iskola Informatikai Rendszerek és Hálózatok programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezés elfogadását javaslom.

Debrecen, 2012. július 2.

Dr. Sztrik János
témavezető

Dr. Kun Ferenc
témavezető

Sejtautomaták szociodinamikai alkalmazásai

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
informatikai tudományok tudományágban

Írta: Kocsis Gergely okleveles programtervező matematikus

Készült a Debreceni Egyetem
Informatikai Tudományok Doktori Iskolája
Informatikai Rendszerek és Hálózatok programja keretében

Témavezetők:

Dr. Sztrik János, Dr. Kun Ferenc

A doktori szigorlati bizottság:

elnök: Dr. Terdik György

tagok: Dr. Almási Béla

Dr. Fehér Béla

A doktori szigorlat időpontja: 2011. január 26.

Az értekezés bírálói:

Dr.

Dr.

A bírálóbizottság:

elnök: Dr.

tagok: Dr.

Dr.

Dr.

Dr.

Az értekezés védésének időpontja: 2012.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Motiváció	3
2.1. Szociofizika, szocioinformatika	4
2.1.1. Szociális hálózatok	7
3. Egyed-alapú modellezés	11
3.1. Az egyed-alapú modellezés alapjai	12
3.1.1. Egyed	12
3.1.2. Kapcsolati háló	12
3.1.3. Környezet	13
3.1.4. Példa – A Schelling modell	13
3.2. Sejtautomata szimulációk	15
3.2.1. A sejtautomata definíciója	16
3.3. Soros és párhuzamos frissítési mód	18
3.4. Hálózati topológiák	20
3.4.1. Az egydimenziós rács	22
3.4.2. A négyzetrács topológia	22
3.4.3. A véletlen hálózat	23
3.4.4. Kisvilág hálózatok	25
3.4.5. A skálafüggetlen hálózat	28
3.5. Sejtautomaták alkalmazásai diffúziós folyamatokra	30
3.5.1. Sejtautomaták a szocifizikában	31

3.6. Célkitűzések	32
4. Információdinamika	35
4.1. Vertikális és horizontális információs csatornák	38
4.2. Makroszkopikus időfejlődés	40
4.2.1. Az időfejlődés általános leírása	41
4.2.2. A makroszintű viselkedés analitikus vizsgálata	42
4.3. A rendszer mikroszkopikus viselkedése	45
4.3.1. A klaszterek méreteloszlása	45
4.3.2. A klaszterek geometriai jellemzői	49
4.4. A klaszterstruktúra hatása a terjedésre	51
4.5. A modell viselkedésének fázisai	52
5. Új technológiák elterjedése	57
5.1. Új technológiák elterjedésének modellezése	
társadalmi-gazdasági rendszerekben	58
5.1.1. A kommunikáció költsége	59
5.1.2. Időfejlődés	62
5.1.3. A szociális kapcsolatok topológiája	63
5.2. A modell analitikus vizsgálata	64
5.2.1. Átlagtér közelítés és vizsgálatok lokalizált részrendsze- rekben	64
5.2.2. Mester egyenlet alapú megközelítés	66
5.3. Sejtautomata szimulációk	74
5.3.1. A technológiai szintek eloszlása – extrém statisztika . .	78
5.4. Egyedek komplex hálózatokon	82
5.5. Az innovációterjedés tulajdonságai	85
5.6. Több szolgáltató jelenlétének hatása a terjedésre	91
6. Összefoglalás	95
7. Discussion	101

1. fejezet

Bevezetés

Életünket születésünktől kezdve a legkülönbözőbb csoportok tagjaiként éljük. A családjaink, osztálytársaink, kollégáink, szomszédaink és a napjainkban egyre szaporodó virtuális kapcsolatok mind egy-egy közösséget jelentenek, melyek tagjaként információhoz jutunk és továbbítjuk azt, véleményt formálunk és osztunk meg, választási helyzetekben döntünk a többiek véleménye alapján. Összességében tekintve, az egyes személy preferenciáit személyes beállítottságán túl leginkább az őt körülvevő közösségek hatása befolyásolja.

A csoportokkal kapcsolatos két legfontosabb kérdés minden résztvevő esetén a következő: *(i.)* „Milyen hatással van a közösség az egyén preferenciáira?” *(ii.)* „Hogyan befolyásolja az egyének különálló véleménye a közösség együttes jellemzőit?” Bár a kérdések nem újkeletűek, a válaszadás pusztán szociológiai eszközökkel több okból is komoly nehézségekbe ütközött a múltban. Egyrészt az ember túl bonyolult ahhoz, hogy viselkedésének minden részletét pontosan leírva vizsgáljuk embercsoportok viselkedését. Ugyanakkor az emberi társadalom csakúgy, mint a természetben megjelenő bonyolult biológiai rendszerek, az állati populációk, a gazdasági folyamatok rendszere, vagy az egyszerű részecskékből felépülő fizikai és kémiai rendszerek viselkedése elemeik és kölcsönhatásaik nyilvánvaló eltérése ellenére makroszkópikus skálán erős hasonlóságot mutat. Ez alapján joggal feltételezhetjük, hogy a

különböző rendszerekre használt, de közös töről fakadó modellezési eszközrendszer sikerrel alkalmazható az autonóm *egyénekből* álló emberi *közösségek* makroszkópikus vizsgálatakor is. Másrészt szükséges nagymennyiségű információ megléte valós közösségekről, azok felépítéséről és viselkedéséről, illetve erőforrás, annak feldolgozásához, következtetések levonásához és a megfigyelt viselkedésformák alapján további vizsgálatok elvégzéséhez numerikus szimulációkon keresztül.

Az említett eszközrendszert a '70-es évektől virágzásnak induló statisztikus fizika adhatja meg, míg az utóbbiakra a napjainkban is robbanásszerűen fejlődő informatika adhat megoldást. A doktori munkám keretében végzett vizsgálatokat tehát három tudományág – statisztikus fizika, szociológia, informatika – keresztmetszetében folytattam, igyekezve mindegyikből a megfelelő eszközöket felhasználva mindhárom területen elfogadott eredményekre jutni. Gyakorlati szempontból kutatómunkám célja a statisztikus fizikából ismert folyamatokkal hasonlóságot mutató szociodinamikai problémák vizsgálata számítógépes szimulációval, kiaknázva az informatika nyújtotta új lehetőségeket. Az következő fejezetekben először ismertetem az egyes statisztikus fizikai és szociológiai folyamatok között megfigyelt analógiát, melyből kiindulva lehetőség nyílik egy új vizsgálati formára a szociodinamikai jelenségek esetében. Ezután ismertetem a munkám során használt egyed-alapú modellezés alapjait, különös tekintettel a sejtautomata modellezésre. E fejezet második felében térek ki azokra a szociális hálózati topológiákra, melyek segítségével hatékonyan és realiztikusan modellezhetők az említett folyamatok. Itt válik hangsúlyossá a téma kapcsolata a informatikai tudományokkal. Az ezt követő fejezetekben a kutatómunka során elért eredményeket ismertetem. Először egy a piacon megjelenő innovációval kapcsolatos információ terjedését vizsgálom, majd a különböző technológiai fejlettségű termékek versengése kerül a középpontba. Ebben a két fejezetben bemutatom a vizsgálatokhoz alkotott modelleket, analitikus számításokat, illetve numerikus szimulációval kapott eredményeket. A disszertációt az összefoglalóval zárom.

2. fejezet

Motiváció

Az elmúlt néhány évtized információs forradalmának köszönhetően jelentős változás történt a tudományos világ felépítésében. A klasszikus önálló tudományágak határain egymás után jelennek meg újabb és újabb interdiszciplináris tudományterületek, melyek klasszikus alapokra építkezve vizsgálják a világot az eddigiekhez képest új szemszögből.

Kiváló példa erre a statisztikus fizikai alapokon nyugvó szociológia, a szociofizika megjelenése. A *XX.* század közepétől kezdve a statisztikus fizikai eszközök használata szociológiai folyamatok leírására mind nagyobb teret hódítottak. Ennek elsődleges oka az a jelenség, hogy az emberi viselkedés egyedisége, sokszínűsége ellenére emberek csoportjai már olyan kollektív viselkedést mutatnak, mint a fizika által vizsgált sokrészesek rendszerek [1].

Az informatika rohamos fejlődése eközben lehetőséget teremtett arra, hogy a korábban megalkotott, illetve az újonnan bevezetett statisztikus fizikai modelleket számítógépes szimulációkkal és numerikus számításokkal támasszák alá. A számítástechnikában rejlő rendkívül hatékony gyakorlati eszközzrendszer már a kezdetektől kiváló alapot szolgáltatott a sorra megjelenő interdiszciplináris tudományoknak. Az orvosi informatika, a bioinformatika, a gazdasági informatika mind klasszikus alapokon nyugvó, mára külön területté fejlődött, mely hatékonyságával már bizonyította a számító-

géppel támogatott tudományok létjogosultságát és fontosságát a klasszikus tudományágak mellett¹. Mára, közel harmincéves munka eredményeképp elmondhatjuk, hogy a szociológia és a statisztikus fizika keresztmetszetében megszületett a szociofizika [2, 3]. Módszertanát tekintve a szociofizikai vizsgálatok elsősorban számítógépes szimulációra építkeznek. Ez a jelenség olyannyira mérvadó, hogy inkább az informatika eszközeire koncentrálna kialakulóban van egy újabb kutatási terület, a „számítógéppel támogatott szociológia”², vagy röviden szocioinformatika.

2.1. Szociofizika, szocioinformatika

A statisztikus fizika eszközeivel olyan rendszerek vizsgálhatók hatékonyan, amelyek nagyszámú, viselkedését tekintve nagyon hasonló egymással kölcsönható elemből épülnek fel. A rendszer elemei/egyedei a részecskéktől, az embereken át, a piacon versengő vállalkozásokig bármit reprezentálhatnak. Az ilyen rendszerek közös kérdése, hogy az egyedek különálló mikroszkopikus viselkedése milyen módon és mennyire befolyásolja a rendszer makroszkopikus viselkedését, azaz szociodinamikai szempontból fogalmazva az egyed viselkedése hogyan hat a csoportra. Az első olyan modellt, ahol szociológiai problémát a statisztikus fizikai módszerekhez hasonló módon oldunk meg French publikálta 1956-ban [4]. A cikk komplex csoportos viselkedésformák leírását kísérli meg egyéni tulajdonságokból kiindulva, s mára alapvetőnek tekintett következtetéseket is megfogalmaz. French cikkét kiterjedt kísérleti és elméleti tanulmányok követték, melyekből felismerték, hogy a fizikában a komplex rendszerek viselkedése, a fázisátalakulások és kritikus jelenségek számos analógiát mutatnak egyes szociodinamikai rendszerekkel [5]. Az első, a fázisátalakulások leírására bevezetett modell az Ising modell volt. A modellt Wilhelm Lenz alkottam meg egyszerű mikroszkopikus kölcsönható spinekre [6], majd tanítványa, Ernst Ising vizsgálatai során kimutatta, hogy az addigi egydimenziós modell csak a rendszer szűk leírására alkalmas, s az

¹ACM Computing Classification System J

²ACM Computing Classification System J.4

ezért általa később fejlesztett kétdimenziós modellt nevezik ma Ising Spin Rendszernek [7, 8]. A módosított Ising Spin Rendszerek máig a szociofizikai modellek alapjául szolgálnak, mint egyszerű kiinduló modellesek [9, 10]. A kezdeti sikerek ellenére mindemellett nem beszélhetünk a fizikai modelleken nyugvó szociológiai tanulmányok robbanásszerű gyarapodásáról. Még a '70-es évek elején-közepén is csak olyan munkák fordulnak elő az irodalomban, melyek, bár utólag jól láthatóan kapcsolódnak a későbbi szociofizika tudományterületbe, eredeti céljukat tekintve pusztán szociológiai indíttatásúak, s az eszközszerrendet nem a fizikából származtatják [11, 12]. Végül az első szociológiai cikk, mely a fizikai modellezési eszközszerrenddel dolgozik, s a munkát már címében is szociofizikának nevezi, 1984-ben jelent meg Serge Galam tollából [2]. Miközben a következő években a klasszikus értelemben vett statisztikus fizika, szűkebben pedig a modern fázisátalakulás-elmélet – hála a kritikus jelenségek kérdésköre egzakt megoldásának – dinamikus fejlődésnek indult, egyre több kutató csatlakozott a szociofizikai kutatásokhoz is. Ennek a növekvő érdeklődésnek és kutatási intenzitásnak köszönhetően mára a szociofizikai tudomány témájaként ismerhetjük meg a véleményterjedési modelleket, a nyelv-dinamikát, az emberi csoportdinamikát és minden más szociális terjedési folyamatot, melyet a fentiek szerint modellezni lehet.

A szociofizika fő irányvonalát jelenleg két terület határozza meg.

(i.) A kutatások egy részének célja, hogy a fizikai modellek újabb és újabb szociológiai alkalmazásait ismertesse meg, illetve módosításokkal alkalmazhatóvá tegyen a szociológiában. Talán az egyik legjobb példa a közelmúltban publikált Sznajd-modell, melyet a kifejlesztése utáni években nagy érdeklődéssel és sikerrel alkalmaztak több változatban, politikai, marketing, vagy akár pénzügyi folyamatok modellezésére. [10]. Természetesen minden egyes ilyen alkalmazásra kifejlesztett modellváltozatnak megvannak a maga korlátai.

(ii.) A jelenleg folyó kutatások másik irányvonala, mely kiemelt érdeklődést váltott ki a kutatók körében, a szociológiai modellek alatt illetve mögött meghúzódó társadalmi hálózat kutatása. A szociális hálózatok kuta-

tása mely végülis már nem is annyira a szociofizika részeként, hanem vele párhuzamosan önálló ággként fejlődik a gráfelméleti kutatások eredményeivel kiegészülve.

A szociofizikával szemben a szocioinformatika jelenét sokkal nehezebb behatárolni. Maga a szó egyszerre jelenti ugyanis az informatika által befolyásolt társadalom szociológiai elemzését és tanítását, az informatikai társadalmi hatásainak kutatását [13], illetve ahogy jelen esetben is, szinonimája a számítógéppel támogatott szociológiának. Bár folyamatosan jelennek meg cikkek, melyek az informatika szociológiai alkalmazásait mutatják be a mai napig nyitott kérdés, hogy a szocioinformatika képes lesz-e önálló tudományággá fejlődni, vagy az informatika továbbra is inkább csak igen hatékony támogató eszköz marad a szociofizikai kutatásokhoz, ahogy az a statisztikus fizikában más esetekben is megfigyelhető.

A szociofizikai kutatások jelentős része foglalkozik a szocioszférában végbemenő terjedési jelenségek vizsgálatával, ideértve elsősorban az információ-, és véleményterjedést, de ugyanígy az innovációk terjedését is. Everett M. Rogers már az 1963-ban megjelent könyvében a szociológiában előforduló terjedési folyamatok széles spektrumát vizsgálja [14]. Részletesen tárgyalja a terjedési folyamatok vizsgálatának korai történetét egészen a '30-as évektől kezdve. A könyv jelenleg az ötödik kiadásánál tart, újra és újra aktualizált tartalommal, mely mindmáig inspirációul szolgál akár szűkebben értelmezett szociológiai kutatásokhoz is [15, 16]. Természetesen Rogers statisztikus fizikai eszközökön alapuló megközelítésén túl szociológiai perspektívából is aktívan kutatott jelenség a terjedés. E területről különösen kiemelkedő Elihu Katz munkássága, aki már Rogers kortársaként is vizsgálta a terjedési folyamatokat [17], emellett azonban máig új kihívások elé állítja a terület kutatóit [18]. Rogers könyvén keresztül teljesen világossá válik, hogy szociológiai oldalról közelítve miért is hasznos a terjedési folyamatok vizsgálata: Ezekből a kutatásokból származó (általában kérdőíves, mára azonban jórészt szimulációs) adatok és az azokon keresztül feltérképezett jelenségek leírására alkalmas modellek megnyitják az utat a további, sokkal inkább területspecifikus

kutatások előtt.

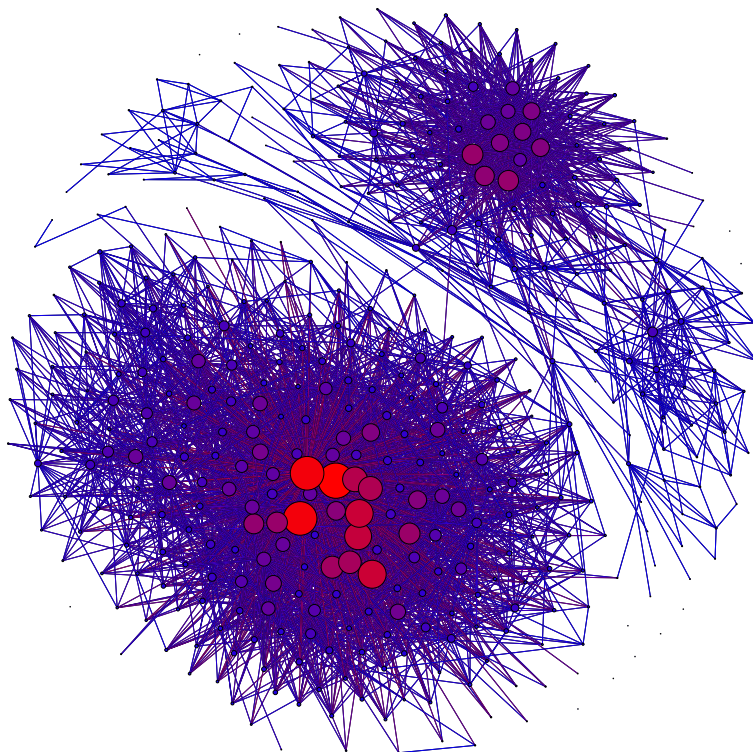
A statisztikus fizikai modellek helyességének ellenőrzésére általában két módszert alkalmazunk. Helyes modell esetén analitikus számításokkal igazolhatjuk, hogy modellünk az egyszerű esetekre a valósággal megegyező módon viselkedik (legalább kvalitatív értelemben), illetve kellően robusztus modell esetén ugyanezen módszerrel, egyszerűbb következtetéseket is levonhatunk a valóságra nézve. A modellek vizsgálatának messze nem annyira egzakt, de mára elfogadottá vált módszere a sok esetben lényegesen könnyebben kivitelezhető számítógépes szimuláció. Az informatika dinamikus fejlődésének köszönhetően mára nem okoz gondot statisztikusan megfelelő méretű és minőségű szimulációs minta előállítás.

Szimulációs számítások alkalmazása különösen célravezető lehet az úgynevezett *egyed-alapú modellek* (agent-based models) esetén [19]. Az ilyen modellekben a rendszert nagyszámú különálló egyed alkotja, amelyek kölcsönhatásban állnak egymással és környezetükkel. Az egyed-alapú modellekkel a következő, 3 fejezetben részletesebben foglalkozunk.

2.1.1. Szociális hálózatok

Az előzőekben említett szociodinamikai kutatások során már a modellalkotás kezdetén szem előtt kell tartani két célt. Egyrészt a rendszer elemei megfelelőképpen kell, hogy reprezentálják a valós rendszer szereplőit, másrészt pedig a modellben felvett résztvevők kapcsolati hálóját vissza kell, hogy adja az eredeti társadalmi/gazdasági rendszer szociális hálózatának tulajdonságait.

Szociális hálózatnak nevezzük emberek csoportját akik között valamilyen kapcsolatrendszer feltételezünk, s akik valamilyen úton hatnak egymásra [20, 21]. Szélesebben értelmezve a definíciót azonban ide sorolhatjuk azokat a társadalmi hálókat is, melyekben a szereplők ugyan nem az egyes emberek, felépítésük azonban jól láthatóan az emberi kontaktusok analógiáján alapul, mint például emberi csoportok hálózata, gazdasági szereplők kapcsolati rendszere vagy akár a Föld országainak kapcsolati hálóját.



2.1. ábra. Példa egy valós szociális hálózatra. A képen a szerző Facebook kapcsolati hálóját láthatjuk, amelyet a Netvizz program segítségével lehet ki-nyerni. A körök személyeket jelölnek, a közöttük lévő vonalak pedig kapcsolatot. A szín (kéktől a pirosig) és a méret (kisebbitől a nagyobbig) arányosan változik a kapcsolatok számával. Ránézésre látszik, hogy a kapcsolati hálót néhány sok kapcsolattal rendelkező és jóval több kevés kapcsolattal rendelkező személy alkotja.

Mára a szociális kapcsolatok hálózatának feltérképezése viszonylag könnyen kivitelezhető feladattá vált. Milliós nagyságrendű csomóponttal rendelkező hálózathoz juthatunk például anonimizált telefonos híváslisták megszerzésével [22], vagy kellő engedélyek birtokában munkahelyünk informatikai infrastruktúrájának feltérképezésével [23]. Természetesen a kényes személyiségi

jogi problémák miatt ilyen nagyságrendű minta beszerzése egyáltalán nem mindenki számára lehetséges. Ezzel szemben például saját online szociális kapcsolatrendszerünk feltérképezése mára senkinek sem jelent gondot e-mailes címlisták, vagy közösségi aktivitásunk alapján. Az így kapott minta még ha nem is túlzottan nagyméretű, arra mindenképp elegendő, hogy kvalitatív képet adjon a modellezni kívánt hálózatokról. Példaként figyelhetjük meg a szerző Facebook kapcsolati hálóját (2.1.1. ábra), melyhez hasonló a Netvizz [24] alkalmazás segítségével percek alatt bárki lementhet magáról. Noha az ábrán látható kapcsolati háló mindössze 454 csomópontot tartalmaz, mégis ránézésre megállapítható néhány a szociális hálózatoknál alapvető tulajdonság, mint például a kisvilág-tulajdonság, vagy a skálafüggetlen topológia (részletesen lásd: 3.4 fejezet).

Az ezeken a hálókon végbemenő valós világbeli folyamatok megismerése akár döntő gazdasági, vagy politikai fontossággal bírhat, ezért nem meglepő, hogy kiemelkedő érdeklődés kíséri az ilyen irányú kutatásokat úgy az informatikában [25, 26, 27], mint a közgazdaságtanban [28] és számos más tudományterületen. A doktori munkám során alkalmazott hálózati topológiákat a 3.4 fejezetben részletesen bemutatom.

A következő fejezetben megismerkedünk a szociofizikai kutatások egyik leggyakoribb vizsgálati módszer, az egyed-alapú modellezés alapjaival, majd bemutatom a modellezés során a valós szociális hálózatok leírására használt hálózati topológiákat.

3. fejezet

Egyed-alapú modellezés

A valós világban előforduló szociális-gazdasági rendszerek gyakran túlzottan bonyolultak ahhoz, hogy analitikus eszközökkel hatékonyan vizsgálhatóak legyenek. Ezeket a rendszereket többnyire nagyszámú, egymástól független, önálló döntésre képes, mégis sok szempontból hasonló szereplő alkotja. A rendszerek szereplői gyakran hatással lehetnek egymásra illetve környezükre és fordítva. Az ilyen típusú rendszerek hatékony elméleti vizsgálatának legfontosabb eszköze az egyed-alapú modellezés¹.

Annak ellenére, hogy az egyed-alapú modellezés gyökerei egészen az 1940-es évekig nyúlnak vissza [29], a módszer a szociológia területén újnak számít, bár egyre növekvő népszerűsége tesz szert, köszönhetően viszonylagos egyszerűségének és hatékonyságának. Az egyed-alapú modellek használatával a kutatóknak lehetősége nyílik vizsgálataik tárgyát a lehető legtermészetesebb módon modellezni széles méretskálán, változatos struktúrák használatával, figyelembe véve akár olyan résztulajdonságokat is, mint az egyedek tanulási, vagy egyéb adaptációs képessége. A továbbiakban lépésről lépésre ismertetem az egyed-alapú modellek felépítését és számítógépes implementációjának módszereit.

¹A dolgozatban az angol „agent-based” megfelelőjeként az „egyed-alapú” fordítást választottam. A magyar nyelvű szakirodalomban emellett azonban gyakran előfordul az „ügynök-alapú”, vagy az „ágens-alapú” fordítás is.

3.1. Az egyed-alapú modellezés alapjai

Egy tipikus egyed-alapú modell a következő három alkotóelemből épül fel: (1). A valós rendszer szereplőit, azok tulajdonságait és képességeit leíró *egyedek*. (2). Az egyedek közötti *kapcsolatokat* jellemző kapcsolati hálózat, melyen keresztül azok egymással kölcsönhatásba léphetnek. (3). Az egyedeket körülvevő *környezet* mely szintén hatással lehet rájuk, sőt akár maga a környezet is változhat az egyedek hatására. Egyed-alapú modell fejlesztésekor ezen alkotóelemek pontos azonosítása és megfelelő leírása alapvető fontosságú [30]. Tekintsük át a következőkben az egyed-alapú modellezéssel kapcsolatos alapvető fogalmakat részletesebben.

3.1.1. Egyed

Az egyed-alapú modellek alapelemei az egymással kölcsönható *egyedek*, amelyek a valódi rendszer szereplőit reprezentálják. Minthogy az egyed-alapú modelleket mára jellemzően számítógépen vizsgáljuk, az elkészült modellek vizsgálatakor az egyedek megjelenési formája egy-egy program, vagy még inkább programrész, mely a valós világ egy-egy szereplőjét írja le (például személyek, cégek, országok, stb.). Ezek a programrészek a körülöttük lévő programkörnyezeten keresztül kapcsolódnak egymáshoz, illetve annak megfelelően alakítják saját viselkedésüket. Az egyedek közti kapcsolattartás módját a valós világból vett példával nevezhetjük *üzenetküldésnek*, mely programozási szempontból is ad némi magyarázatot a modellek működésének hátterére [19].

3.1.2. Kapcsolati háló

A valós szociális-gazdasági rendszerben megfigyelt szereplők között minden vizsgált esetben létezik egy kapcsolati háló, mely leírja, hogy mely szereplők mely más szereplőkkel léphetnek kapcsolatba. Modell szinten ez egy kapcsolati gráf bevezetésével vehető figyelembe, ahol az élekkel összekötött egyedek hatnak egymásra. A gráf tulajdonságai a lehető legnagyobb po-

tossággal kell, hogy reprezentálják a valódi rendszer kapcsolati jellemzőit. Ezekről a hálózatokról és szerkezeti jellemzőikről részletesebben írok a 3.4. fejezetben.

3.1.3. Környezet

Egyed-alapú modellek esetén *környezetnek* hívjuk az egyedeket körülvevő virtuális világot. Ez a környezet lehet teljesen áttetsző, azaz a modell időfejlődése során se nem változik, se nem hat az egyedekre, de az is előfordulhat, hogy az egyedek változása közben maga a környezet is megváltozik, illetve hatással van rájuk. A modellek egy részénél a környezet egyúttal az egyedek valós térbeli helyzetét is jelzi [31], mi azonban a későbbiekben csak olyan modellekkel foglalkozunk, melyekben az egyedek környezete a hálózati topológián keresztül csak a szociális kapcsolatok rendszerét írja le.

A fenti három jellemzőn kívül az egyed-alapú modellek leírásának fontos része az egyedek állapotváltozásait meghatározó szabályrendszer, a rendszerre jellemző *dinamika* megadása. Ez a szabályrendszer tartalmazza, hogy a környezetük és egymás által befolyásolt, valamilyen kapcsolati háló szerint összekapcsolt egyedek milyen szabályok mentén változtathatják meg állapotukat a rendszer egyes időpillanataiban.

3.1.4. Példa – A Schelling modell

Az egyed-alapú modellek gyakorlati hasznossága és ereje talán az egyik első, ilyen modellen keresztül szemléltethető legjobban. Tekintsük példaként a Thomas Schelling által 1971-ben bevezetett, azóta is rendre hivatkozott népesség-szegregációs modellt [32, 33].

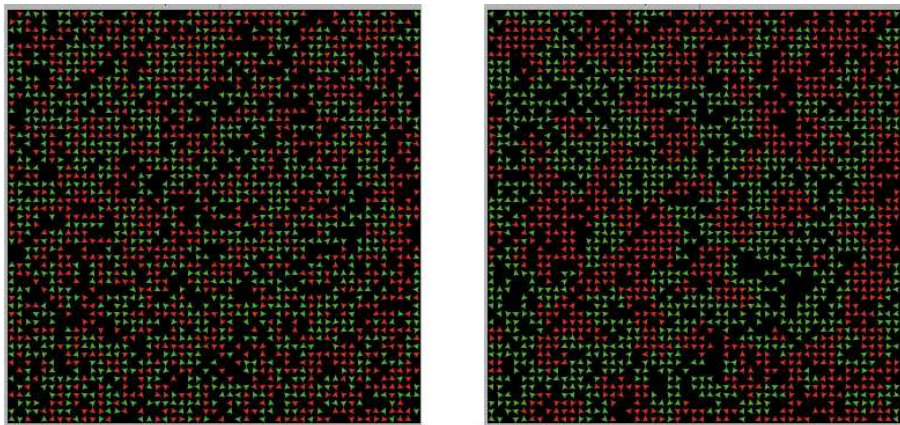
A modell célja, az amerikai nagyvárosokban megfigyelhető etnikai alapon nyugvó csoportosulások modellezése ². A modell alapja egy négyzetrács,

²A modell eredeti célja szerint kifejezetten az egyesült államokbeli városokat vizsgálta de a jelenség természetesen ugyanúgy jelentkezik a Föld bármely más nagyvárosában, sőt akár kisebb településeken is

mely egy városrészt reprezentál. A rács minden egyes cellája egy-egy háztartást jelöl. A cellákban véletlenszerűen helyezünk el vagy „*piros*” vagy „*zöld*” egyedeket, melyek a házakban élő embereket, vagy egységként kezelhető kis családokat reprezentálják. Egy cellában egyszerre csak egy egyed tartózkodhat és sok cella üresen is marad (azaz az egyedek száma kisebb, mint a cellák száma). Az egyedek minden egyes időlépésben ellenőrzik a körülöttük lévő 8 legközelebbi cellában elhelyezkedő szomszéd színét (ha az adott cella nem üres) és megszámlálják, hogy a szomszédok közül hány színe tér el a sajátjuktól. Amennyiben az eltérő színűek aránya meghalad egy bizonyos konstans „tolerancia” küszöbértéket (azaz egy előre megadott mennyiségnél több ellenkező színű szomszéd van jelen), az egyed „*boldogtalan*”-ná válik és úgy dönt, hogy másik házba költözik. A költözés a gyakorlatban azt jelenti, hogy az egyed átkerül a rács egy másik szabad cellájába. A következő időlépésben, elképzelhető, hogy pont ez az újonnan átköltözött egyed okozza majd, hogy egy-egy szomszédjánál az ellenkező színűek száma átlépi a küszöbértéket – „*boldogtalan*”-ná válnak, s ezért újabb költözések történnek.

Megfigyelések alapján 0.3 vagy annál magasabb tolerancia küszöbérték esetén véletlenszerű kezdeti elrendezésből indulva klaszterizációs folyamat megy végbe, azaz az egyedek színük szerint csoportokba rendeződnek a 3.1 ábrán látható módon. Érdekes eredmény, hogy ez a csoportosulás még akkor is végbemegy, ha az egyedek toleranciaszintje magasabb, mint a szomszédok fele, azaz többségében ellenkező színű szomszédok esetén sem válnak boldogtalaná. Ez a jelenség pedig valóban megfigyelhető volt az 1970-es évek amerikai nagyvárosaiban.

A modell számos tanulsággal szolgál az egyed-alapú modellezés lényegének megértéséhez. Először is a kapott eredmény nem triviális. Hiába ismerjük az egyedek viselkedésére bevezetett szabályokat, nem jósolhatjuk meg a rendszer makroszkopikus viselkedését. Másrészt a modell nagyon egyszerű, könnyen érthető, hiszen egyetlen paraméterrel, a tolerancia küszöbvel dolgozik. Harmadszor, a kapott eredmény nagyon robusztus, azaz a kontrollparaméter széles értéktartományában megjelenik a klaszterizálódás, sőt



3.1. ábra. A Schelling modell kezdeti (*balra*) és végállapota (*jobbra*) 0.3 tolerancia küszöb esetén

Forrás: Wilensky, U. (1997). NetLogo Segregation model.

<http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/Segregation>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.

még a költözési módszer megváltoztatása sem okoz lényegi eltérést (például az egyed nem feltétlenül véletlenül választ új helyet a rácson, hanem előtte mérlegelhet, hol lenne neki jó). Végül pedig az eredmények jól összehasonlíthatók a valóságban megfigyeltekkel, még ha a kvantitatív összehasonlítás nehézkes is, hiszen nem könnyű megfelelő mérőszámot találni egy család, vagy személy boldogtalanságára. A modellt természetesen azóta is aktívan kutatják [34, 35], s alig találni a területen olyan összefoglaló művet, ahol ne tennének róla említést [36, 37].

3.2. Sejtautomata szimulációk

Az egyed-alapú modellezés egyik legelterjedtebb formája a sejtautomata modellezés. A következőkben ezzel a speciális egyed-alapú modellezési technikával foglalkozunk. A sejtautomata modellezés számos alkalmazási területre

lelt a komplex rendszerek világában mióta Neumann János 1948-ban élő biológiai rendszerek vizsgálatához bemutatta [29]. Ismerve a komplex rendszerek és a szociális közösségek közötti fentebb már vázolt hasonlóságot, nem meglepő, hogy szociális rendszerek vizsgálatához szintén igen hatékony eszközként szolgálhat.

3.2.1. A sejtautomata definíciója

Az általánosan elfogadott definíció szerint egy sejtautomata végezzámú véges lehetséges állapottal bíró, rácsra helyezett *sejt* együttese. A sejtek az őket körülvevő szomszédos sejtek állapota alapján diszkrét időpillanatokban megváltoztathatják saját állapotukat. Azaz összefoglalva a sejtautomata egy diszkrét dinamikai rendszer, amelyet diszkrét állapotok és diszkrét időfejlődés jellemez [38].

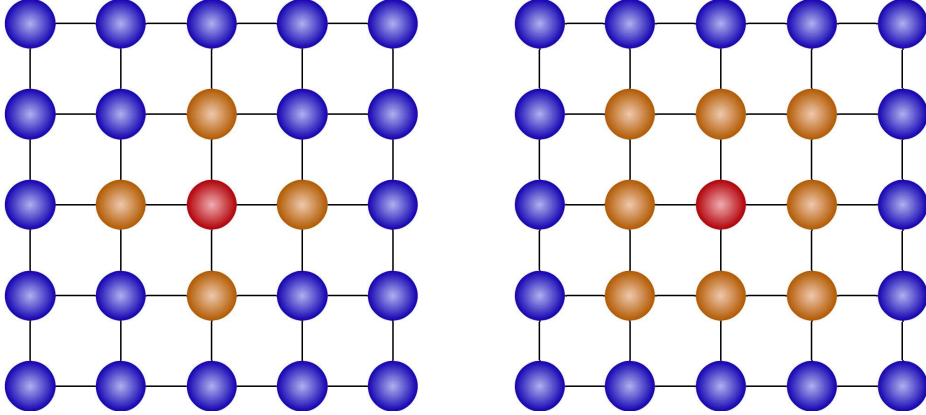
A diszkrét tér a legegyszerűbb esetben periodikus határfeltétellel ellátott négyzetrács³ formájában jelenik meg. Ennek rácspontjain helyezzük el a sejteket, aminek következtében mindegyiküknek vagy pontosan 4 (Neumann szomszédság, vagy négyszomszédság), vagy pontosan 8 (Moore szomszédság, nyolcszomszédság) szomszédját tekintjük, ahogy az a 3.2. ábrán látható.

Az így kapott rendszer elemei, azaz a sejtek végezzámú különböző állapotot vehetnek fel. Ezeket az állapotokat az $a_i = 0, 1, \dots, K - 1$ egész számokkal reprezentálhatjuk, ahol K a megengedett állapotok száma, i pedig a rendszer elemeit, azaz a rácspontokra helyezett sejteket indexeli. Gyakori speciális eset, hogy feltételezzük, hogy a sejtek összesen $K = 2$ különböző állapotot vehetnek fel. Ezeket az állapotokat a fentieknek megfelelően ilyenkor 0-val, illetve 1-gyel jelöljük.

A rendszer időfejlődését diszkrét t időlépésekben értelmezzük. Ennek megfelelően a kiinduló állapotban $t = 0$, s minden további i . időlépést $t = i$ jelöl.

A rendszer diszkrét dinamikáját a frissítési *szabály* adja, mely leírja, hogy

³A modellezés során használt hálózati topológiákkal a későbbiekben részletesen foglalkozunk. Lásd 3.4 fejezet



3.2. ábra. A négy-, illetve nyolcszomszédság illusztrációja. A baloldali ábrán a pirossal jelölt sejtnak a négyszomszédság szerint vett szomszédai a narancssárga színű sejtek. A jobboldali ábrán ugyanezen jelölés mellett a nyolcszomszédság szerinti szomszédok láthatók.

a rendszer elemei egy adott t időpillanatbeli állapotukból milyen $t + 1$ időpillanatbeli állapotba lépnek át. A rendszer állapotváltását az azt felépítő sejtek állapotváltásának összessége adja. Erről a sejtszintű dinamikáról feltételezzük, hogy mindig lokális, azaz a sejt következő $t + 1$ időpillanatbeli állapota csak az ő saját, illetve közvetlen környezetének (Neumann, vagy Moore) jelenlegi t időpillanatbeli állapotától függ, azaz

$$a_i^{t+1} = \Phi(a_i^t, a_j^t), \quad (3.1)$$

ahol a_j^t az a_i^t sejt környezetébe eső sejteket jelöli. Az állapotváltást leíró frissítési folyamatot általában párhuzamosnak definiáljuk az összes sejtre, azaz az automata $t+1$ időpillanatában annak minden sejtje frissítésre kerül a t időpillanatban vett rendszerállapot alapján. A frissítési mód egyéb további formái kerülnek a bemutatásra a 3.3. fejezetben.

Mára számos látványos és többé-kevésbé hasznos sejtautomata vált ismertté [39]. A Neumann által lefektetett matematikai alapokra építkezve a sejtautomata modellek segítségével adták meg az úgynevezett szimulációs

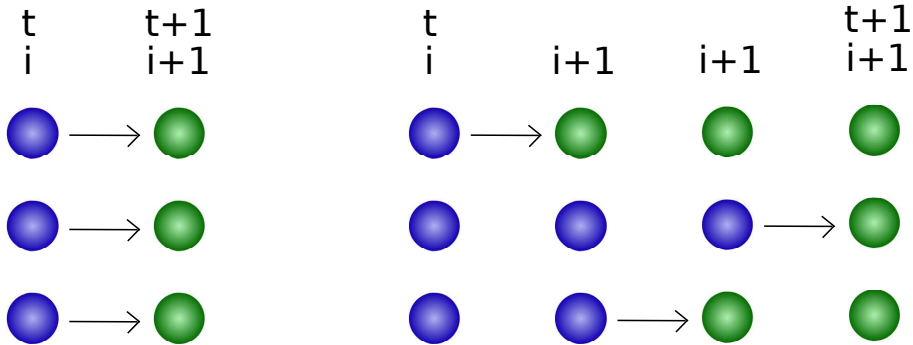
játékokat az 1970-es években. Ezek közül is a leghíresebb John Horton Conway életjátéka "Game of Life" [40]. Az ehhez hasonló játékokban mutatott sikerek ellenére a sejtautomaták csak az 1980-as évekre váltak igazán népszerűvé Stephen Wolfram munkáján keresztül, aki a sejtautomatákat matematikai eszközként használta önszervező-statisztikus rendszerekben [39]. Wolfram munkájában számos területen alkalmazta a sejtautomatákat, úgy mint biológia, fizika, szociológia. stb.

3.3. Soros és párhuzamos frissítési mód

Számítógépes rendszerszimulációk során meg kell határoznunk, hogy a rendszer egyedei képesek-e egyidejűleg módosítani állapotukat, illetve, hogy viselkedésük hogyan befolyásolja a többi résztvevőt. Aszerint, hogy a fenti tulajdonságokat hogyan szeretnénk megjeleníteni a rendszerben, két egymástól jól elkülöníthető módszert használhatunk [41].

Sejtautomaták esetében a gyakoribb megoldás, hogy az egyedek mindegyike minden időpillanatban döntést hoz a rendszer aktuális időpillanatbeli állapota alapján, majd a következő időpillanatra mindegyik egyed felveszi az előzőekben hozott döntése alapján szükséges állapotot. Ezt a módszert nevezzük *párhuzamos* frissítésnek. Párhuzamos frissítés esetén az egyedek $t+1$ időpillanatbeli állapota értelemszerűen csak a rendszer t időpillanatbeli állapotától függ. Ezt a módszert mutatja be a 3.3. ábra baloldali példája.

Egy másik, ám ritkábban használt módszer az egyszerű soros vagy szekvenciális frissítés. Ebben az esetben – ahogy az a 3.3. ábrán is látható – egy iterációs lépésben egyszerre csak egy egyed változtathatja meg az állapotát, így amikor szomszédaira kerül a sor az állapotváltással, azok már az eredeti egyed új állapotát veszik figyelembe saját döntésük meghozásakor. Soros frissítés esetén egy diszkrét időlépést (a párhuzamos esettel szemben) ritkán választunk egyetlen állapotváltási időnek. Hogy a párhuzamos módszerrel összemérhető eredményeket kapjunk általában azt mondjuk, hogy egy időlépés a rendszer egyedeinek megfelelő számú állapotvizsgálat után telik le. Definíció kérdése, hogy egy időlépésen belül elvárjuk-e, hogy minden egyed



3.3. ábra. A soros és párhuzamos frissítés közötti különbség. Kék szín jelzi a frissítetlen, míg zöld a frissített sejteket. Az első esetben egy t időlépés egy i frissítési lépésnek felel meg, melyben párhuzamosan minden sejt állapota frissül. A második esetben a sejtek frissítése egymás után szekvenciálisan történik. Egy t időlépésnek annyi i frissítési lépés felel meg, ahány sejtből a rendszer áll.

egyszer és csak egyszer döntsön, vagy csak azt írjuk elő, hogy a döntések darabszáma mennyi (azaz megengedjük hogy egy időlépésen belül legyenek olyan egyedek, aki nem döntenek, illetve olyanok is, akik többször).

Implementálási szempontból mindkét módszer jár előnyökkel és hátrányokkal is. A párhuzamos frissítés előnye, hogy a frissítés determinisztikus abban az értelemben, hogy azonos állapotból kiindulva, azonos feltételek mellett mindig ugyanaz a következő állapot lesz az eredmény. Programozástechnikailag viszont hátránya, hogy a rendszert minden időpillanatban két példányban kell tárolnunk, hogy még az utolsó egyed is az előző időpillanatbeli állapot alapján tudjon dönteni.

A soros frissítési módszer esetében a rendszert csak egy példányban kell, hogy tároljuk, bárhog is határozzuk meg az időlépést. Ennél a módszernél azonban mindenképpen figyelmet kell szentelni arra, hogy az egyedek frissítése valóban véletlenszerűen történjen egy időlépésen belül. Nem nehéz belátni, hogy a legtöbb szociális rendszert leíró modell esetében nemkívánt mellékhatásokkal jár, ha az egyedek minden egyes alkalommal jól meghatá-

rozott sorrendben hozzák meg döntésüket az állapotváltásról. Természetesen az egyedek sorrendjének meghatározásakor használhatunk pszeudo-random számokat, hogy a szimuláció reprodukálható maradjon. A soros frissítési mód egyik legfontosabb előnye a párhuzamossal szemben, hogy míg abban a (gyakran a hálózati topológia mellékhatásaként) a valós rendszerhez nem kapcsolódó befagyott, vagy ciklikus állapotba juthatunk, az utóbbi frissítési mód a bevitt zaj eredményeként képes lehet abból kiköszönteni a rendszert.

3.4. Hálózati topológiák

A hálózati topológiáknak számos tudományterületen belül létezik helyenként egyező, helyenként különböző meghatározása. Általánosan elmondható azonban, hogy a statisztikus illetve esetünkben a szociofizikai modellek vizsgálatakor túlnyomó többségben az alábbiakban leírtaknak megfelelő hálókat használata a jellemző. A hálózat csúcsokból és a csúcsok, mint végpontok között futó irányított, vagy irányítatlan élekből áll. Modelltől függően egy csúcs több élnek is lehet végpontja (irányított él esetén kezdő-, vagy végpontja). Jellemzően két csúcs között (irányított él esetén irányonként) legfeljebb egy él futhat. Mielőtt sorra vennénk, milyen hálózati topológiák használata a leggyakoribb szociodinamikai kutatások során, ismerkedjünk meg a hálózatok néhány alapvető jellemzőjével. Mivel doktori munkám során kizárólag irányítatlan hálózatokkal dolgoztunk, a következő definíciókat is mind az irányítatlan esethez adtuk meg.

Út, távolság és átmérő

Ha egy hálózat két csúcspontja között él található, akkor azt mondjuk, hogy közöttük létezik *út*, melynek hosszúsága 1. Ebben az esetben a két csúcs egymásból közvetlenül elérhető.

A hálózat két a és b csúcsa között létezik n hosszúságú út, ha felsorolható egymás után $n + 1$ olyan egymástól különböző csúcs, melyek mindegyike (az elsőt kivéve) a felsorolásban előtte állóból közvetlenül elérhető, s a felsorolás

elején és végén az a és b csúcsok állnak. Egy hálózatban két csúcs d távolságának a köztük lévő legrövidebb út hosszát értjük. A háló átmérője a benne szereplő csúcsok közül a két legtávolabbi közötti legrövidebb út hossza [42].

A fokszámeloszlás

A fokszámeloszlás a véletlen hálózatok vizsgálatakor bevezetett fogalom, mely egy adott gráf esetében azt adja meg, hogy a gráfban milyen valószínűséggel fordulnak elő adott szomszédszámmal, azaz *fokszámmal* rendelkező csúcsok. Eszerint

$$\rho(k) = \frac{N_k}{N}, \quad (3.2)$$

ahol N_k a k fokszámú csúcsok darabszáma a hálóban, N pedig a hálót alkotó csúcsok száma [43]. Szabályos rácsok esetén a fokszámeloszlás egy konstans értékkel helyettesíthető.

Klaszterezettség

A hálózatok klaszterezettsége, vagy összekapcsoltsága speciális fogalom, mely a természetben előforduló valós hálózatok vizsgálatakor került előtérbe. Egyszerűen szólva jelentése az, hogy mi a valószínűsége annak, hogy egy csúcspont szomszédjai a hálóban egymással is közvetlenül szomszédosak [44]. Matematikailag a klaszterezettség egy csúcspont szomszédai közötti valós és lehetséges kapcsolatok számának aránya. Amennyiben egy csúcspontnak összesen k darab szomszédja van, a szomszédok közötti összes lehetséges él száma

$$e' = \frac{k(k-1)}{2}. \quad (3.3)$$

Ha a szomszédok közötti valóban meglévő éleket az i csúcs esetén e_i -vel jelöljük, klaszterezettsége $c_i = e_i/e'_i$, azaz

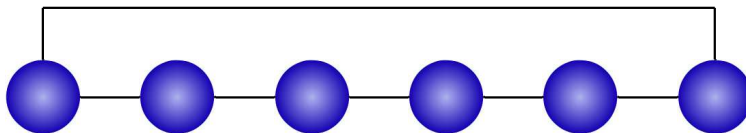
$$c_i = \frac{2e_i}{k_i(k_i-1)} \quad (3.4)$$

formában kapható meg, ahol k_i az i egyed szomszédainak száma. Hálózatok tulajdonságaként szokás még az átlagos klaszterezettségről beszélni, mely a csúcsok klaszterezettségének átlaga, azaz

$$\langle c \rangle = \sum_i \frac{c_i}{N}. \quad (3.5)$$

3.4.1. Az egydimenziós rács

A legegyszerűbb, szimulációkban is használt topológia az egydimenziós rács, melyben a csúcsok egymás mellett egy láncban helyezkednek el. Az élek a szélső (azaz a lánc két végén álló) csúcsokat kivéve minden csúcsból mindkét irányba indulva a legközelebbi csúcsokhoz csatlakoznak. A szélső csúcsokat legtöbb esetben a 3.4. ábrán látható módon egymás szomszédaiként kezeljük, ezt a megoldást nevezzük *periodikus határfeltételnek*.



3.4. ábra. Egydimenziós rács periodikus határfeltétellel. A rácson minden egyednek pontosan két szomszéda van.

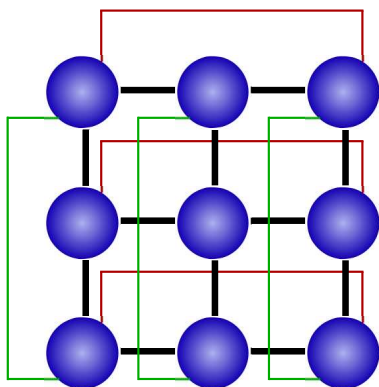
Az egydimenziós rács esetében minden egyed fokszáma konstans 2. Klaszterezettségről nem beszélhetünk, 3-nál több csúcs esetében $\langle c \rangle$ értéke 0.

A 2. fejezetben korábban már említett Ising modell első variációját is ilyen topológián értelmezte Lenz [6], természetesen csak analitikus számításaihoz. Éppen egyszerűségénél fogva nem jellemző, hogy egydimenziós rácsra épített modellnél szimulációs eredményeket keressünk, hacsak a modell dinamikája nem nehezíti meg túlzottan, vagy zárja ki teljesen az egzakt analitikus számításokat.

3.4.2. A négyzetrács topológia

A legegyszerűbb, már szimulációkhoz is gyakran használt topológia a négyzetrács. A rács szélei közelében fellépő peremhatások kiküszöbölésére általában itt is mindkét irányban periodikus határfeltételt alkalmazunk, azaz rá-

csunkat egy tórusz felületére feszítjük. A négyzetrács topológia egyik legnagyobb előnye, hogy számítógéppel rendkívül könnyen kezelhető.



3.5. ábra. Egyszerű négyzetrács topológia periodikus határfeltétellel. A színezett élek a periodikus határfeltételt kialakító kapcsolatok.

A négyzetrácsra helyezett elemek programozáskor egyértelműen megfeleltethetők egy kétdimenziós tömb elemeknek, az éleket pedig az index szerinti szomszédsággal értelmezhetjük. A négyzetrácson általában négy-, vagy nyolcszomszédságot értelmezünk, ettől függően az egyedik fokszáma konstans 4, vagy 8. A klaszterezettség a gyakrabban használt négyszomszédság esetén $\langle c \rangle = 0$, míg nyolcszomszédság esetén $c_i = \langle c \rangle = 2/7$. Gyors és általában kvalitatív szempontból helyes szimulációs eredmények előállításához ez a leggyakrabban használt topológia.

3.4.3. A véletlen hálózat

Egyszerű atomi rendszereknél akár a természetben is előfordulnak egyszerű rácsszerkezetek, ha nem is négyzetrács, de háromszög-, vagy hatszögrács formában [45, 46]. A szociális rendszerekre azonban az ilyenféle rendezettség a legritkább esetben jellemző csak. A szociális kapcsolatok által alkotott hálózatokhoz hasonló topológiaként gyakran kerül elő a véletlen gráf topológia, melyet Erdős Pál és Rényi Alfréd után *ER* gráfként is emlegetnek [47]. Ebben az esetben a hálózatról kezdeti információként csak annyi áll rendelkezésünkre, hogy tudjuk a hálóban szereplő csúcsok és élek számát, valamint, hogy ezúttal sem szerepelnek multiélek. Szabályos véletlen gráfot állíthatunk elő, ha vesszük a csúcsok halmazát, majd előre definiált számú élet építünk köztük, mindegyik esetén egyenletes eloszlással véletlenszerűen választva ki a végpontokat a csúcsok halmazából [43, 48].

A fentiek szerint generált véletlen hálózat ρ fokszámeloszlása binomiális eloszlás, melynek várható értéke pontosan a hálózat átlagos fokszáma [49]. Eszerint ha a háló tetszőleges két csúcsa között p valószínűséggel szerepel él, s összesen N darab csúcsot feltételezünk a hálóban, a fokszámeloszlás

$$\rho(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} \quad (3.6)$$

formában adódik.

Könnyen belátható, hogy a véletlen topológia sokkal közelebb áll a valószínűségi szociális hálózatok felépítéséhez, mint az egyszerű rácsok. A háló csúcsai különböző számú szomszéddal rendelkezhetnek, mely szomszédok elhelyezkedése a hálóban nem kötött, ugyanúgy, ahogy az az emberi ismeret-ségre is jellemző. A véletlen gráf túlzott rendezetlensége miatt bár mint topológia, számtalan érdekességgel szolgál [50, 51, 52, 53], nehéz kezelhetősége miatt numerikus szimulációk futtatása esetén kevésbé hatékony, mint a reguláris topológia.

A véletlen hálózatok egyik legfontosabb tulajdonsága, ami miatt hasonlónak mondhatjuk a valószínűségi hálókhoz az, hogy a hálón belül hosszútávú kapcsolatok vannak jelen. Míg egy egyszerű rácson egy csúcsból egy a háló másik végén lévő csúcsba eljutni csak a közvetlen szomszédokon egyezéssel végiglépkedve lehet, a véletlen gráfban rendezetlen átkötések vannak a csúcsok között. Ezek a hosszútávú kapcsolatok drasztikusan lerövidítik az utat a háló tetszőleges két csúcsa között, s így jelentősen csökkentik a hálózat átmérőjét.

A generált élek számának növelésével gyakorlatilag tetszőleges $N(N-1)/2$ -nél kisebb átlagos fokszámú hálózatot létrehozhatunk, a hálózat klaszterezettsége azonban a szélsőségesen nagy átlagos fokszámot leszámítva mindig távol marad a valószínűségi hálózatokban megfigyeltektől [23]. Ezek modellezéséhez olyan topológiára van szükségünk, melyben egyszerre van jelen a véletlenszerűség, a kis átmérő és a magas klaszterezettség.

3.4.4. Kisvilág hálózatok

A valós szociális hálók és a véletlen hálók is úgynevezett „kisvilág” típusú hálózatok. Ez matematikailag azt jelenti, hogy míg az egyszerű rácsok esetében a hálózat méretének növelése a hálózat átmérőjének lineáris növekedését vonja maga után, a „kisvilág” típusú hálózatok átmérője csupán logaritmikusan nő.

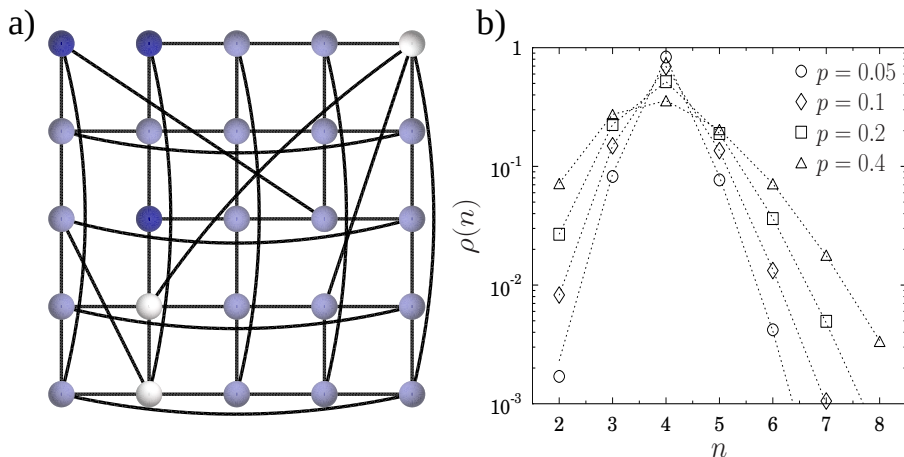
Watts-Strogatz módszer

Watts és Strogatz 1998-ban publikálta cikkét, melyben módszert adnak egyszerű rácsokból kiinduló ám végül „kisvilág” tulajdonságú hálózatok generálására [44]. A Watts-Strogatz módszer lépései a következők:

- Induljunk ki egy egyszerű rácsból. Ez az eredeti példában egy egydimenziós rács, de ugyanúgy megfelel a négyzetrács is.
- Járjuk végig a háló minden élét és egy előre adott p valószínűséggel az él mindkét végét kössük át egyenletes eloszlás szerint véletlenül választva a háló csúcsai közül.

A módszernek több más változata is használatban van (az él egyetlen végét kötjük át, vagy átkötés helyett új véletlen éleket helyezünk el a hálóban), a végeredmény azonban mindig egy olyan „kisvilág” tulajdonságú hálózat, melyben kevés átkötött, vagy új él esetén még jól felismerhető a szabályos rács eredet. A mindkét végén átkötött élek előnye hogy ebben az esetben a p átkötési valószínűség változtatásával teljes átmenetet kapunk a szabályos ráctól ($p = 0$) a véletlen hálózattig ($p = 1$) [54]. Könnyű belátni, hogy megfelelő kiinduló hálózatot választva a módszer lehetőséget ad olyan topológiák előállítására, melyekben a kis átmérő nagy klaszterezettséggel párosul.

A 3.6(a) ábra a Watts-Strogatz újrakötési módszert illusztrálja. Négyzetrács esetén periodikus határfeltétel mellett a p valószínűség szerint kötöttünk át éleket. A 3.6(b) ábrán a baloldalon is látható hálózathoz hasonlóképpen készített hálók fokszámoszlását ábrázoltuk. Az így előállított



3.6. ábra. (a): Egy kisméretű, Watt-Strogatz módszer szerint átdrótozott négyzetrács, (b): Különböző valószínűséggel átdrótozott négyzetrácsok fokszámeloszlása. Az átkötési valószínűség növelésével az átlagos fokszám nem változik, az eloszlás alakja azonban mind közelebb kerül a véletlen hálózatok (3.6) egyenletben megadott binomiális fokszámeloszlásához. A szaggatott vonalak analitikus eredményeket jelölnek, míg a szimbólumok valódi generált hálókra kapott értékek.

hálózatok fokszámeloszlása egy binomiális és egy Poisson eloszlás konvolúciójaként adódik

$$\rho(k) = \sum_{s=0}^{\min(k-m, m)} \binom{m}{s} (1-p)^s p^{m-s} \frac{(pm)^{k-m-s}}{(k-m-s)!} e^{-pm} \quad (3.7)$$

formában [55], ahol m az átlagos fokszám fele, míg k a megfigyelt fokszám.

A Watts-Strogatz módszer segítségével tehát eszközt kapunk, mellyel jól kontrollálhatjuk a hálózat topológiáját számítógépes modellezés során. Amennyiben a folyamatban csak a már meglévő éleket helyezzük át újra és újra, a hálózat átlagos fokszáma természetesen meg fog egyezni a kiinduló rácséval. Egyes esetekben az eredeti rácsot képező élek mellett továbbiakat

adunk a háléhoz, így az átlagos fokszám növelése szintén lehetséges úgy, ahogy az a véletlen hálók esetében volt. Fontos új tulajdonság azonban, hogy míg az átmérő már kevés él áthelyezése után is drasztikusan csökken, megfelelő kiinduló rács esetén⁴ a háló klaszterezettsége sokáig magas maradhat.

Az átkötési valószínűség módosításával szemmel kísérhetjük az eredmények kvalitatív változásait, ahogy egyre közelítünk a véletlen hálózathoz, és ezzel a valós hálózatokhoz [56]. Azonban még a teljesen véletlen topológia elérésekor sem állíthatjuk, hogy a valós szociális hálózatok topológiájához közeli hálóra helyeztük a modellt. A valós társadalmi hálózatok túlnyomó többségének közel pontos modellezéséhez a Barabási-Albert László és Albert Réka által 1999-ben kifejlesztett úgynevezett skálafüggetlen hálózatok jelentik a megoldást [57].

Barabási és Albert kutatásaik során első vizsgálataikat az Internet felépítésével kapcsolatban végezték. Céljuk annak feltérképezése volt, hogy az egyes oldalakról induló linkek hova mutatnak, illetve mely linkek mutatnak egy adott oldalra. Munkájuk során megfigyelték, hogy az Internetet mint hálózatot vizsgálva kevesebb számú sokszor hivatkozott oldalt és nagyszámú olyan oldalt találni, melyekre csak egy-két link mutat. Megállapították, hogy ezen hálózat fokszámeloszlása (azaz az egyes oldalakra történő hivatkozások száma, ami jelen esetben a csúcsokba futó élek száma)

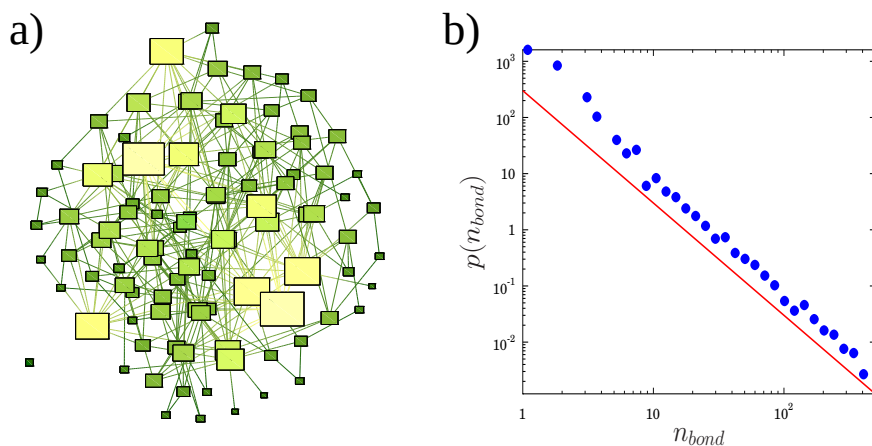
$$\rho(k) = k^{-\alpha}, \quad (3.8)$$

negatív exponensű hatványfüggvény, ami gyökeresen eltér az Erdős-Rényi féle véletlen hálózat binomiális fokszámeloszlásától [23]. Az ilyen hálózatokat skálafüggetlen hálózatnak nevezzük. A (3.8) egyenletben szereplő α exponens pontos értéke a vizsgált szociális hálózat jellemzője.

⁴Például nyolcszomszédságú négyzetrács, vagy olyan gyűrű, melyben minden elem a négy legközelebbi csomóponttal szomszédos

3.4.5. A skálafüggetlen hálózat

A skálafüggetlen hálózatokkal kapcsolatos kutatások Barabásiék munkája után két irányba folytatódtak. Egyrészt nagy érdeklődés kísérte a skálafüggetlen hálózatok jellemzőinek feltérképezését [58, 59], illetve a hálózat növekedésének módszereit [60, 61]; másrészt sorra jelentek meg a cikkek a legkülönbözőbb tudományterületekről, melyekből kiderült, hogy a skálafüggetlen topológia számos nem várt helyen megjelenik [62]. Így derült ki az is, hogy az újonnan felismert hálózati topológia meghatározó jelentőségű a legtöbb szociális alapú rendszerben [63, 64]. Így skálafüggetlen hálózatokkal találkozhatunk a biológiában [65], a járványterjedésben [66, 67], a közgazdaságtanban [68] és természetesen a szociológiában [69, 70].



3.7. ábra. (a): Egy 100 elemből álló skálafüggetlen hálózat ábrázolása. A csúcsok mérete arányos a hozzájuk tartozó fokszámmal. (b): Skálafüggetlen hálózat fokszámeloszlása kétszer logaritmikus skálán ábrázolva. A hálók fokszámeloszlása negatív exponensű hatványfüggvény. (A gráf megjelenítésére a Tulip megjelenítőprogramot használtuk (<http://tulip.labri.fr>)).

A skálafüggetlen hálózat generálására Barabási eredetileg az úgynevezett „preferential attachment” (azaz valamilyen megfontolás szerinti preferencián alapuló összekapcsolás – magyarul legtöbbször „népszerűségi kapcsolódás”

[23]) eljárást javasolta. A módszer lényege az, hogy a hálózatot folyamatosan csúcsokkal bővítjük, viszont ezeket mind nagyobb valószínűséggel kapcsoljuk azokhoz a csúcsokhoz, melyeknek már az adott pillanatban is több szomszédja van. Az algoritmus lépései a következők [57, 60]:

- Induljunk m_0 darabszámú csúccsal, ahol m_0 értéke jellemzően kisebb, mint 10.
- Minden s időlépésben kapcsoljunk egy új csúcsot a hálózathoz $m(\leq m_0)$ élel. A „preferential attachment” alapján annak $p(k_i)$ valószínűsége, hogy az új csúcsot az i . korábbi csúcshoz kötjük

$$p(k_i) = k_i / \sum_{j=0}^{m_0+s} k_j.$$

- Folytassuk addig, amíg a hálózat mérete el nem éri az $N = m_0 + s$ csúcsot.

A szociológiai kutatások során leggyakrabban ezt a típusú hálózatot használjuk, a kapott hálózat (3.8) egyenletben leírt fokszámoszlásának $\alpha = 3$ exponense ugyanis igen közel van a valódi szociodinamikai problémák esetén leggyakrabban előforduló értékekhez [42]. A 3.7(a) ábrán egy százalékmű minta skálafüggetlen hálózat látható. A hálózathoz tartozó fokszámoszlást a 3.7(b) ábrán ábrázoltuk. Az minta hálózat készítésekor a fent ismertetett módszer kicsit bonyolultabb változatát használtuk, így lehetőséget adva az $\alpha = 3$ -tól különböző fokszámoszlás-exponensű gráfok előállítására.

A skálafüggetlen hálózatokkal kiegészítve teljes az egyszerű reguláris rácsokból, kis-világ tulajdonságú átkötött rácsokból és véletlen hálóból álló rendszerünk. A megfelelő modellek így már a teljes topologikus spektrumon vizsgálhatók az egyik végletet jelentő teljesen analitikus számolásoktól a valósággal kvantitatív szempontból közel megegyező felépítésű hálókön történő szimulációkig.

3.5. Sejtautomaták alkalmazásai diffúziós folyamatokra

A sejtautomaták használatának kezdete diffúziós folyamatok leírására szintén erre az időre tehető [71]. Meg kell jegyeznünk ugyanakkor, hogy ezen a területen a sejtautomata modellezés igazi ereje csupán a számítási kapacitás 1990-es évekbeli robbanásszerű növekedésével válhatott nyilvánvalóvá. A század végére azonban a sejtautomata szimulációk alkalmazása diffúziós folyamatok esetében alapvető eszközzé nőtte ki magát, s mára általános kutatási módszertan az ilyen modellekben becsült analitikus eredmények validálása sejtautomatákkal végzett numerikus szimulációk segítségével. Mivel doktori dolgozatom során a diffúziós jelenségek egy speciális formájával, innovációk szociodinamikai rendszerekben történő elterjedésével foglalkozom, a következőkben tekintsük át az innováció-diffúzió példáját. Ez a terület az 1960-as évek óta aktív kutatások tárgya, s mindmáig egyre növekszik népszerűsége [72, 73, 74].

Az innováció-diffúzióval kapcsolatos kutatások kezdeteként rendszerint Everett M. Rogers 1962-es úttörő jelentőségű könyvének első kiadását szokás említeni [14]. A könyv mára az ötödik frissített és bővített kiadásnál tart. Az említett könyv mellett rálátást nyerhetünk az innováció-diffúzióval kapcsolatos kutatások múltjára és jelenére Mahajan számos összefoglaló cikkéből [75], vagy Castellano és munkatársai munkáiból [76].

Könyvében Rogers a innováció-diffúziót úgy határozza meg, mint az a folyamat, mely során az innováció „különböző csatornákon keresztül közlésre kerül a szociális rendszer tagjai közt”. Ebben az olvasatban „az innováció lehet egy ötlet, módszer, vagy akár eszköz, melyet újként definiál a rendszer egy résztvevője” [14]. E definíció alapján tehát az innováció-diffúzió összefoglaló meghatározás minden olyan folyamatra, mely során egy szociális hálózaton terjedést figyelhetünk meg. Mind Rogers könyvében, mind más innováció-diffúzióval foglalkozó kiadványokban a fentiekre tipikus példaként kerül elő Ryan és Gross 1943-as tanulmánya a hibrid-kukorica vetőmag elterjedéséről az iowai farmerek között [77]. A vizsgálat központi kérdése

annak felderítése, hogyan terjedhetett el a hibridkukorica-vetőmag annak ellenére, hogy használata kiszolgáltatottabbá teszi a farmereket. Hasonló alapvető példaként tekinthetjük az óvodák elterjedését világszerte, a modern matematika tanításának elterjedését, vagy a drog terjedését egy egyetemi közösségben. Sőt ide sorolhatunk olyan ellenpéldákat is, melyekben bár a lehetőség adott volt, az innováció mégsem terjedt el, mint például a Dvorak billentyűzetkiosztás esetében.

A szociális gazdasági rendszerekben történő innováció-diffúzió modellezésére a sejtautomata modellek is hasznos és hatékony eszköznek bizonyultak. [78, 79] Ez a megközelítés a háttérben a „lentről-felfelé” vizsgálati módszertant követi, azaz vizsgálatainkhoz egyedeket feltételezünk, akik egy szociális közösség részeit képezik [19]. Ezeket az egyedeket le kell, hogy tudjuk írni változók egy jól definiált csoportjával, melyek mérhetőek kell, hogy legyenek. A változókat úgy definiáljuk, hogy többé-kevésbé képesek legyenek visszaadni az egyedek véleményformálásának mind racionális mind irracionális összetevőit a modell szempontjából (például véleményformálás parlamenti választások alkalmával, vagy új technológiák piacon történő megjelenés utáni elterjedésekor).

Az ilyen egyed-alapú modellek természetüktől fogva rendezetlenek mivel a rendszer egyedeit jellemző változók tipikusan igen széles skáláról vehetik fel értéküket. Az egyedek tulajdonságainak valószínűségi eloszlása szintén vissza kell, hogy adja a valós közösségekben jellemző, szociológiai eszközökkel már korábban megfigyelt tendenciákat.

3.5.1. Sejtautomaták a szocifizikában

Az egyedek kölcsönhatása szociális-gazdasági rendszerek esetében jóval komplikáltabb, mint a részecskéké a klasszikus fizikai rendszerekben. Emiatt általában szintén nehezebb a kölcsönhatást zárt matematikai formában megadni. Az egyszerűség kedvéért mindenesetre két határesetet megfogalmazhatunk: *(i)* teljes mértékig racionális egyedek esetében az egyedek jól definiált viselkedést mutatnak, mely csak a szomszédjaiktól függ. Ez a kap-

csolatalapú döntési szabály eredetileg rendezetlen szociodinamikai rendszer ellenére determinisztikus időfejlődést eredményez. (ii) Teljesen irracionális egyedek esetében az általuk hozott döntések tökéletesen véletlenszerűek. Ebben az esetben a kapcsolódó egyedek csak a véletlenszerűség fokát tudják befolyásolni az előző állapothoz képest.

A korlátozott racionalitás egy a két véglet közötti döntéshozatali módszer. Természetesen ez a megközelítés az előzőeknél jóval realiztikusabb, viszont jelentős problémába ütközik az ilyen döntési mechanizmus egzakt matematikai leírása, hiszen mind a determinisztikus (racionális), mind a véletlenszerű (irracionális) alkotórészeket figyelembe kell venni.

Egy szociális-gazdasági rendszer fejlődésének leírása dinamikájának megadásával lehetséges. A 3.2 fejezetből tudjuk, hogy a dinamika azon döntési szabályok együttese, amelyek alapján az egyedek eldöntik, hogy az idő múlásával milyen módon változtassák meg állapotukat. Az említett, csupa racionális egyedből álló rendszerek esetében a dinamikát leíró szabály determinisztikus s a véletlenszerűség csupán a rendezetlen kezdeti állapoton keresztül jelenik meg. Az ilyen determinisztikus eset jól formalizálható sejt-automatákkal.

A másik határesetben, azaz ha a rendszer csupa véletlenszerűen döntő irracionális egyedből áll, a dinamikát Monte Carlo szimulációk segítségével vizsgálhatjuk, mint a Metropolis algoritmus [19].

3.6. Célkitűzések

Doktori dolgozatomban társadalmi- gazdasági rendszereken vizsgálom a technológiai fejlődés feltételeit és folyamatát. Rogers úttörő munkája [14] alapján társadalmi-gazdasági rendszerek technológiai fejlődését két fő lépésre bonthatjuk: A rendszer elemei (egyének, társaságok, vállalatok, ...) *innováció* révén új, a korábbiaknál fejlettebb technológiákat hozhatnak létre. Ugyanakkor előfordulhat, hogy egy fejlettebb technológiát akár nyilvánvaló előnyei ellenére sem fognak tömegek használni, így az nem járul hozzá a rendszer egészének fejlődéséhez. A technológiai fejlődés másik nagyon fon-

tos lépése az új technológiák *terjedése*, ami a tömeges használat előfeltétele.

Kutatómunkám során két, a technológiai fejlődés mikéntjének megértéséhez igen fontos szociodinamikai folyamatot vizsgáltam részletesebben. A társadalmi- gazdasági rendszerekben megjelenő új innovációk elterjedésének egyik legfontosabb eleme az innováció megjelenése utáni információáramlás. A rendszer szereplői ekkor szereznek tudomást az új technológia létezéséről, illetve használatának lehetőségéről a korábbi, alacsonyabb szintű technológiákkal szemben. Piaci példát véve ez a folyamat megfelel a termék, vagy technológia gyártója és szolgáltatója által a médiában folytatott reklámtevékenységnek. Eközben a rendszer szereplői egymásközt is tapasztalatot cserélnek, híret keltik az adott terméknek. Ezeknek megfelelően az információ áramlásakor kétféle információs csatornát értelmeztem. A reklámtevékenységnek megfeleltethető, minden szereplőre együttesen ható vertikális csatornát, illetve a rendszer szereplői közötti lokális kommunikációt leíró, szereplőről-szereplőre ható horizontális információs csatornát. Dolgozatom első felében e két csatorna versengésének hatását vizsgálom mind analitikus, mind numerikus eszközökkel.

Kutatómunkám másik nagy témakörében egy lépéssel későbbi piaci folyamatot vizsgálok. Feltételezem, hogy a rendszer minden résztvevője már használ valamilyen terméket egy igény kielégítésére, de ezek technológiai szintje akár jelentősen is eltérhet egymástól. A nagyszámú lehetőség közül az úgynevezett hálózati technológiákra koncentrálok, amelyek használati értékét egy felhasználó számára elsősorban az határozza meg, hogy a technológiát már hány más felhasználó is birtokolja. Ilyenek például a telekommunikációs technológiák, de akár számítógépes szoftvereket is említhetünk, ahol használat közben előny a kompatibilitás más felhasználókkal. A vizsgálatok során a fejlettebb technológiákat jelentő termékek elterjedésének feltételeit és a terjedés módját tanulmányozom. Az előző esettel ellentétben ezúttal nincs külső befolyásoló tényező, a rendszer résztvevőinek viselkedését kizárólag a többi résztvevő technológiájával való kompatibilitásra való törekvés mozgatja. A minél teljesebb körű leírás érdekében vizsgálataim során ismét

mind analitikus, mind numerikus eszközöket felhasználtam.

Munkám során a statisztikus fizika eszközeivel az információ terjedésével és az úgynevezett hálózati technológiák versengésével kapcsolatos bonyolult rendszerek működésére alkotok matematikai modelleket, melyek segítségével a terjedéssel kapcsolatos hatékonysági vizsgálatok végezhetők el. Eközben analitikus, numerikus, valamint szimulációs módszereket alkalmazok a szociális rendszerjellemzők meghatározására.

Kutatómunkám célja olyan sejtautomatákra épülő egyed-alapú modellek kidolgozása volt, amelyek lehetővé teszik az információs csatornák versengésének és technológiák terjedésének realisztikus vizsgálatát gazdasági-társadalmi rendszerekben. A dolgozatban célul tűztam ki, hogy a vizsgált példákon keresztül bemutassam a sejtautomaták szociodinamikai alkalmazásainak lehetőségeit.

Konkrét kutatási célként a következő kérdésekre kerestem választ:

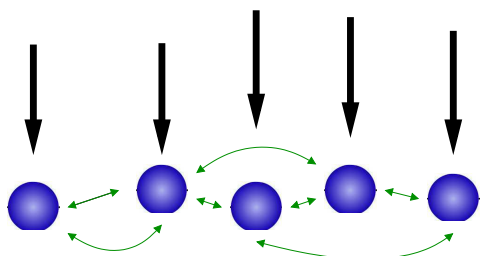
- Milyen hatással van egy új termékkel/technológiával kapcsolatos információ elterjedésére a médiából, illetve a személyes kapcsolatokon keresztül szerzett tudás, azaz hogyan befolyásolja az információterjedést a vertikális és horizontális információs csatornák versengése?
- Hogyan befolyásolja a rendszer résztvevőinek szociális kapcsolatrendszere az információáramlást?
- Az információáramlás után hogyan terjed el és egyáltalán el tud-e terjedni egy fejlettebb, minőségi technológia a környezetében jelen lévő nagy mennyiségű alacsonyabb színvonalú technológia mellett? Milyen feltételek mellett győzhet a minőség a mennyiség felett?
- Milyen hatással van a szociális hálózat topológiája a hálózati technológiák terjedési folyamatára?
- Hogyan befolyásolja a fejlettebb technológiák terjedését a rendszerben több szolgáltató jelenléte és a ebből következő nyilvánvaló szolgáltató szerinti kompatibilitásra való törekvés az egyedek részéről?

4. fejezet

Információdinamika

Társadalmi-gazdasági rendszerekben a technológiai fejlődés két lépésben megy végbe. Egyfelől a rendszerben megjelenő új *innovációk* mindig újabb és újabb lehetőséget teremtenek a rendszer szereplőinek, hogy fejlettebb eszköz/módszert használhassanak. Másrészt a megjelenő magasabb szintű technológia idővel *terjedhet* a résztvevők között, előidézve ezzel a rendszer egészére vonatkoztatott összesített technológiai színvonal változását [14].

A társadalmi-gazdasági rendszerekben megjelenő új innovációk elterjedésének egyik legfontosabb eseménye az innováció megjelenése utáni információáramlás. A rendszer szereplői ekkor vesznek tudomást az új technológia létezéséről, illetve használatának lehetőségéről. Piaci példát véve ez a folyamat egyfelől megfelel a termék, vagy technológia gyártója és szolgáltatója által folytatott reklámtevékenységnek, miközben a rendszer szereplői egymásközt is tapasztalatot cserélnek, hírt keltenek az adott terméknek. Ezeknek megfelelően az információ áramlásakor kétféle információs csatornát értelmezhetünk. A reklámtevékenységnek megfeleltethetünk egy minden szereplőre együttesen ható vertikális csatornát, a rendszer szereplői közötti lokális kommunikációt pedig leírhatjuk egy szereplőről-szereplőre ható horizontális információs csatornával (lásd 4.1. ábra) [80].



4.1. ábra. Egy társadalmi-gazdasági rendszerben működő információs hálózat illusztrációja. A rendszer résztveői (gömbök) információt cserélhetnek a közöttük lévő kapcsolatokon keresztül (zöld nyilak), illetve információhoz juthatnak egy külső vertikális csatornán keresztül is (fekete nyilak).

szokás speciális jellegük miatt *szociális perkolációnak* hívni [81]. A perkolációs küszöb környékén az ilyen rendszerek önszervező kritikusságot mutatnak [81]. A szociális perkolációs modellt később Proykova és Stauffer egészítette ki külső információs csatorna vizsgálatával, amelyről feltételezték, hogy csak a terjedési folyamat előtt hat, így kizárva a külső csatorna időfejlődés közbeni hatásait [83].

Noha eredetileg nem ezért vizsgálták őket, a 2. fejezetben már említett terjedési folyamatok természetesen szintén számos analógiát mutatnak olyan, az információáramlás tanulmányozásakor tapasztalt jelenségekkel, mint a rendszeren belüli konszenzus keresése melynek eredményeként akár nem egyensúlyi fázisátalakulásokkal is találkozhatunk [84, 72, 85].

Az ebben a fejezetben bemutatott munkánk célja egy olyan információ-terjedési modell megalkotása, melyben az információ az új technológia vagy termék létezése, s melyben a terjedési folyamat során horizontális és vertiká-

Ez a kettős információs csatornán keresztüli információáramlás régóta a területtel foglalkozó kutatások középpontjában áll. E kutatások elsődleges célja, hogy modellezzük, miként következnek be a piacon nagy ipari sikerek, vagy épp bukások [81, 76, 82]. Solomon és munkatársai szociális kapcsolatokon keresztüli információáramlason és a gyártók által adott különböző minőségű termékeken alapuló modelljükkel kimutatták hogy a vizsgált rendszerekben fontos szerepet játszanak az úgynevezett perkolációs folyamatok. Ezen folyamatok együttesét

lis információs csatornák egyszerre vannak jelen. Modellünkben a rendszer kölcsönható elemeit komplex szociális kapcsolati hálóval¹ rendelkező egyedekkel² írjuk le. Az egyedek viselkedését két paraméterrel adjuk meg, melyek az érzékenységet jelölik a vertikális és a horizontális információs csatornákra.

Analitikus számításokkal és numerikus szimulációkkal a modell paramétereitől függő újszerű viselkedésformák egész spektrumát mutatjuk be. A külső hatásokra kiemelkedően érzékeny egyedek nukleációs központként szolgálnak, melyekből az időfejlődés során informált egyedekből álló klaszterek nőnek. Az ilyen nukleációs pontok megjelenése és a folyamatos klaszternövekedés az időfejlődés egy szakaszában óriásklaszter megjelenéséhez vezet, mely csaknem minden, az innovációról tudomást szerzett egyedet tartalmaz.

A következőkben a modell alapján megmutatjuk, hogy az egész rendszert tekintve az informált egyedek aránya egy integrálegyenlettel jól leírható. Számítógépes szimulációk segítségével megmutatjuk, hogy az óriásklaszter megjelenésének t_c kritikus időpillanatában a rendszerben található klaszterek méreteloszlása hatványfüggvényt követ. A hatványfüggvény τ exponense függ mind az egyedek közti kölcsönhatás erősségétől, mind a reprezentált egyedek kapcsolatrendszerét leíró szociális hálózat topológiájától. Négyzetrácson végzett szimulációk eredményeként tudjuk, hogy τ értéke a horizontális (azaz lokálisan ható) kommunikációs csatorna dominanciája esetén $\tau = 1/2$. A vertikális információs csatorna erősödése esetén átmenetet figyelhetünk meg $\tau = 1.75$ -ös exponenshez, míg a külső információs csatorna tényleges dominanciájakor az egyszerű perkolációhoz hasonló klaszterképződés lép fel.

Amennyiben a szociális hálózat topológiáját a 3.4. fejezetben bemutatott kisvilág típusú hálózatra cseréljük, a p átkötési valószínűség bevezetésével és növelésével, azaz a hálózatban megjelenő hosszútávú átkötések megjelenésével átmenet figyelhető meg a $\tau = 2.5$ -ös exponenshez. Az óriásklaszter megjelenésének t_c időpillanata az átkötési valószínűség növelésével logaritmikusan csökken.

¹lásd 3.4 fejezet

²lásd 3 fejezet

4.1. Vertikális és horizontális információs csatornák

Modellünkben a társadalmi-gazdasági rendszert a korábban már ismertetett módon egyedek komplex topológián elhelyezett csoportjával adjuk meg. Az időfejlődés során minden egyed kétféle állapotot vehet fel attól függően, hogy tudomást szerzett-e már a termékről, azaz birtokában van-e az információnak, vagy sem. Az i egyed állapotát az egyedre jellemző S_i paraméter jelöli. S értéke

$$S_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i. \text{ egyed még nem informált} \\ 0, & \text{ha az } i. \text{ egyed már informált} \end{cases} \quad (4.1)$$

Az időfejlődés kezdetén, azaz az új technológia vagy termék megjelenésekor egyetlen egyed sem informált, azaz $S_i = 1$, $i = 1, \dots, N_0$ ahol N_0 jelöli a rendszer összes egyedének számát. Megjegyezzük, hogy S pontos értékeinek megválasztása pusztán a matematikai egyszerűség kedvéért esett épp az 1 és 0 értékekre.

Modellünkben az információ kiinduló forrása mindenképp a külső csatorna, azaz a reklámozás kell, hogy legyen. Egy új technológia vagy termék megjelenésekor, amikor még senki sem tud róla a piacon, az első informált résztvevők biztosan reklámokon, hirdetésekken keresztül szereznek tudomást annak létezéséről. Modellünkben ezt az analógiát követjük. A külső (azaz vertikális) hírcsatorna minden egyed számára azonosan elérhető. Annak erősségét az E , rendszerre jellemző paraméterrel írjuk le. A külső csatorna E erőssége a valóságra vetítve a gyártó, vagy szolgáltató reklámkampányának intenzitását jelenti, mely mennyiségileg a reklámra költött pénzüsszeggel jellemezhető.

A homogén külső információs erő ellenére az egyes egyedek érzékenysége erre az erőre eltérhet egymástól – egyszerűen az emberek különböző személyiségeiből adódóan. Az egyedek külső információs csatornára való érzékenységet a modellben a β_i paraméter írja le, mely egy véletlen valós szám $f(\beta)$ eloszlással a $0 \leq \beta \leq \beta_{max}$ intervallumból. A $\beta_i = 0$ érték azokat

az embereket jelenti, akik vagy nem kerülnek kapcsolatba a médiával (nem néznek TV-t és nem olvasnak újságot), vagy semminemű érdeklődést nem mutatnak a reklám tárgya iránt.

Az egyedek számára az információ másik forrása az egyedek közötti szociális kapcsolatokon keresztüli kommunikáció. A közösségekben kialakuló vélemények, pletykák, szóbeszéd alkotta horizontális információs csatorna. Ugyanakkor csakúgy, mint a külső információk esetében, az egyedek a horizontális csatornán érkező információkra is különböző mértékű érzékenységet mutathatnak. Ezzel a tulajdonsággal írjuk le modellünkben, hogy az emberek különböző mértékben lehetnek fogékonyak mások véleményére. A szociális hálón belülről érkező információkra való érzékenységet az egyszerűség kedvéért egy, az egyedre jellemző α_i paraméterrel jelöljük. Az egyed szociális kapcsolatai között nem teszünk erősség szerint különbséget, azaz α_i az i egyed minden szomszédja ugyanaz az érték. Az egyedek érzékenysége azonban ennek ellenére persze nem feltétlenül egyezik meg. Az α paraméter szintén véletlen valós szám $g(a)$ eloszlás szerint a $0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ intervallumból.

Az i egyed által a különböző csatornákból befogadott összes információ I_i mennyiségét

$$I_i = \alpha_i S_i \sum_{j=1}^{n_i} (1 - S_j) + \beta_i S_i E \quad (4.2)$$

alakban adjuk meg, ahol n_i az i egyed szociális kapcsolatainak számát jelenti. A (4.2) egyenlet első tagja egyszerűen megszámlolja, hogy az i egyed összes szociális kapcsolata közül hány egyed „informált”, hiszen a szummában csak az $S_j = 0$ paraméterértékű szomszédok adnak járulékot. A második taggal a külső forrásból érkező információ mennyiségét adjuk meg. Amennyiben az egyed kellő mennyiségű információhoz jut az innovációról, informálttá válhat. Az informálttá válás az információ I_i mennyiségétől monoton növekedően függő A_i valószínűséggel következik be

$$A(I_i) = 1 - e^{-I_i/\lambda}, \quad (4.3)$$

ahol λ skálaparaméter. Vegyük észre, hogy amennyiben az i egyed a fenti valószínűség szerint informálttá válik, azaz $S_i = 0$, egyrészt az általa fogadott új információ 0-ra csökken, másrészt az i egyed szomszédai a továbbiakban magától az i egyedtől is információhoz jutnak. Mind I_i , mind A_i tehát az idő függvénye.

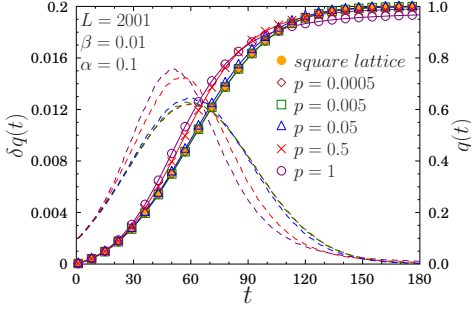
A könnyebb kezelhetőség kedvéért és hogy a modell tulajdonságait kellő pontossággal vizsgálhassuk az egyedek érzékenységi paramétereinek azonos értékeket adtunk meg, azaz $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$, $i = 1, \dots, N_0$. Szimulációinkat α és β változtatásával paramétereztük, míg a rendszer többi paraméterét konstansként kezeltük $E = 1$, $\lambda = 1$. A topológia kontrollálásához a 2. fejezetben már hivatkozott Watts-Strogatz módszert alkalmaztuk [44]. A felhasznált hálózatok előállításakor periodikus határfeltétellel ellátott négyzetrácsból indultunk ki, és a p átkötési valószínűséget változtattuk. Hogy szimulációink eredményeképpen megfelelő minőségű és mennyiségű adathoz jussunk, rendszerenként $L = 2001$ oldalhosszúságú négyzetrácsokból indultunk, ami rendszerenként $N_0 \approx 4 \times 10^6$ egyedet jelent. A végleges adatokat ezután jellemzően 50 – 100 futtatás átlagos eredményeként nyertük.

Analitikus számítások és numerikus szimulációk eredményeként kimutattuk, hogy a vertikális és horizontális információs csatornák versengésének eredményeképp a rendszerben bonyolult időfejlődés figyelhető meg. A következőkben a rendszer mikroszintű dinamikáján és strukturális tulajdonságain alapuló makroszkopikus viselkedését mutatjuk be.

4.2. Makroszkopikus időfejlődés

A makroszkopikus időfejlődést a már informált egyedek $q(t) = N(t)/N_0$ arányával és az éppen informálttá váló egyedek $\delta q(t)$ számával jellemezzük. A kezdeti állapottól egy adott t időpillanatig informálttá vált összes egyed számát $N(t)$ -vel jelöljük. A 4.2. ábra a $q(t)$ és $\delta q(t)$ értékeket áb-

rázolja t idő függvényeként több különböző Watts-Strogatz módszer szerint előállított topológián. Az ábrán látható eredményeket számítógépes szimulációkkal kaptuk rögzített α és β paraméterértékek mellett.



4.2. ábra. A rendszerben szereplő már informált egyedek $q(t)$ aránya, illetve adott t időpillanatban informálttá váló egyedek $\delta q(t)$ mennyisége a t idő függvényében.

hogy a görbe minden esetben rendelkezik egy t_m maximummal, melynek helye egybeesik $q(t)$ inflexiós pontjával. A p átkötési valószínűség növelésével (azaz a topológia közelítésével a véletlen hálózat felé) t_m helye balra tolódik, azaz a terjedési folyamat egyre gyorsabbá válik. Mivel szimulációinkban minden esetben összefüggő hálózatokkal dolgoztunk, az informált egyedek $q(t)$ aránya minden esetben 1-hez tart.

4.2.1. Az időfejlődés általános leírása

Ahhoz, hogy analitikus módszerekkel vizsgálni tudjuk a modell makroszkopikus viselkedését, először a rendszer mikroszintű dinamikáját kell megértenünk. Kezdetben egyetlen elem sem informált, ezért információ csak a vertikális csatornán, a rendszeren kívülről érkezik az egyedekhez. Az idő múlásával előbb-utóbb véletlenszerűen, informált egyedek jelennek meg a rendszerben. Ezek a korai időpillanatokban informálódott egyedek a ho-

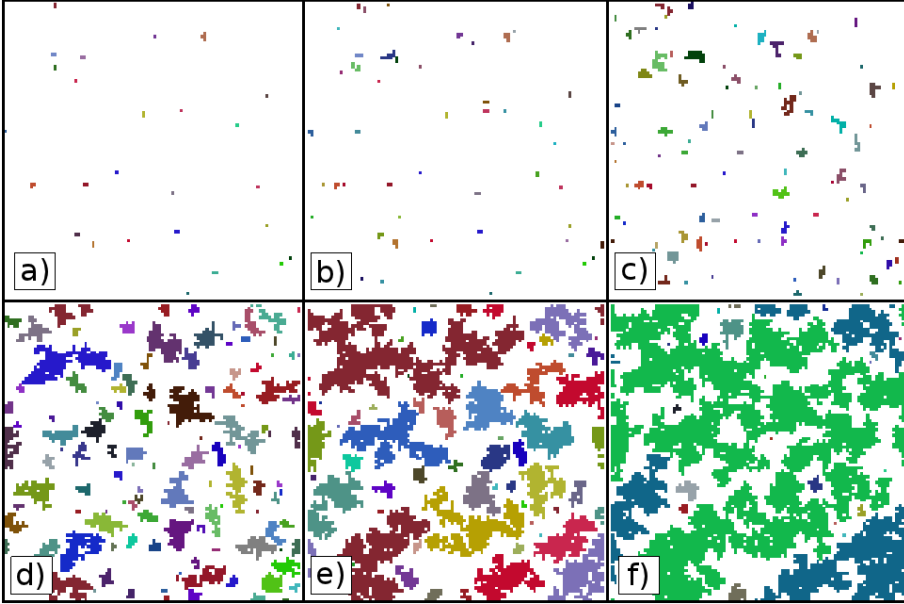
Vegyük észre, hogy tetszőleges topológia esetén, azaz a p átkötési valószínűség minden értékénél $q(t)$ az idő monoton növekvő függvénye jól meghatározott inflexiós ponttal. Ugyanakkor fontos észrevenni azt is, hogy a kvantitatív eltérések mellett az informált egyedek $q(t)$ aránya minden alkalommal a terjedési folyamatokra jellemző „S” alakot mutatja [14, 75, 86]. A t időpillanatban újonnan informálttá váló egyedek $\delta q(t)$ arányát t függvényeként ábrázolva észrevehetjük,

rizontális információáramlásnak köszönhetően egy klaszterképződési folyamatban nukleációs központokként szolgálnak. A $\delta q(t)$ mennyiség 4.2. ábrán megfigyelt kezdeti nemnulla értéke ezekből a nukleációs központokból származik.

Mivel a nukleáció, azaz a kizárólag a külső hatások eredményeként informálódott egyedek elhelyezkedése véletlenszerű, egyenletes eloszlás szerint véletlenül elhelyezkedve klaszterek jelennek meg szerte a rendszerben. A 4.3. ábra a rendszer mikroszintű viselkedését mutatja be négyzetrácson ($p = 0$). Hogy a rendszerben lezajló időfejlődés láthatóvá váljon, ebben az esetben viszonylag kicsi, $N_0 = 10000$ elemből álló rendszert használtunk egy $L = 100$ oldalhosszúságú egyszerű négyzetrácson. Figyeljük meg, hogy míg az időfejlődés elején (4.3(a) és 4.3(b) ábrák) a nukleáció dominál, a későbbiekben a rendszerben található nem informált egyedek számának csökkenésével és a informáltak növekedésével ez a jelenség lelassul s helyette a hálón belüli adaptáción keresztüli terjedés válik dominánssá (4.3(c) és 4.3(d) ábrák). Az ábrákon jól megfigyelhető, hogy a rendszerben lévő klaszterek S mérete igen széles skálán mozog. Mivel az időfejlődés folyamán folyamatosan keletkeznek új klaszterek, minden t időpillanatban van esélyünk $S = 1$ méretű klasztert találni. Emellett azonban a „magok” minden időlépésben nagyobbra és nagyobbra nőnek köszönhetően a horizontális információáramlás miatti terjedésnek. Sőt idővel klaszterek összeolvadása is mind nagyobb valószínűséggel fordul elő, ezzel tovább növelve az adott időpillanatban lehetséges legnagyobb klaszterméretet.

4.2.2. A makroszintű viselkedés analitikus vizsgálata

Az egyedek szociális hálózatán az informált egyedek összekapcsolódó csoportjait klaszternek nevezzük. A klaszterek S méretét a klasztert alkotó informált egyedek darabszáma adja. Abban az esetben, ha az összeolvadás még nem jellemző a rendszerben, a klaszterek méretét egyszerűen számíthatjuk analitikusan. A klaszterek növekedésének oka ebben az esetben kizárólag a klaszter területén történő információáramlás a körülvevő egyedek felé. A



4.3. ábra. Pillanatfelvételek a rendszer időfejlődéséről jellemző időpillanatokban. A fejlődés elején nukleációs központok jelennek meg. A központokból indulva aztán klaszternövekedés indul. Később a klaszterek összeolvadnak, míg egy kritikus t_c időpillanatban a rendszerben óriásklaszter jelenik meg. Az ábrán az oldalhossz $L = 100$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.01$.

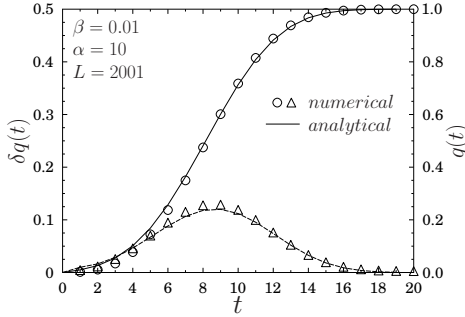
növekedés üteme ekkor arányos kell legyen a klaszter területével:

$$\frac{dS}{dt} \sim \sqrt{S}. \quad (4.4)$$

Ebből adódik, hogy egy a $t' < t$ időpillanatban keletkezett klaszter mérete a t időpillanatban

$$S(t, t') = C(t - t')^2, \quad (4.5)$$

ahol a C szorzófaktor egyaránt függ α és β értékétől.



4.4. ábra. $q(t)$ és $\delta q(t)$ a t idő függvényében ábrázolva numerikus szimulációink (szimbólumok) és analitikus számításaink (folytonos vonalak) eredményeként. Figyeljük meg a tökéletes egyezést a szimulációs és az analitikus eredmények között.

száma 2. A fentiekből kiindulva a t időpillanatban bekövetkezett új adaptációk száma, mely a rendszer makroszkopikus viselkedésének egyik fő jellemzője,

Egy adott időpillanatban két okból keletkezhetnek újonnan informált egyedek a rendszerben: (i) egyrészt a külső hatás eredményeként nukleáció következhet be $p_n = 1 - \exp(-\beta E/\lambda)$ valószínűséggel, (ii) másrészt a klaszterek kerületén új egyedek válhatnak informálttá, hála az egyedek közti információáramlásnak. Ez utóbbi valószínűsége $p_g = 1 - \exp(-2\alpha/\lambda)$, ahol feltételezzük, hogy a klaszterek határára lévő nem informált egyedek tipikus és átlagos informált szomszéd-

$$\delta q(t) = [1 - q(t)] p_n + [1 - q(t)] \int_0^t \frac{dS(t, t')}{dt} [1 - q(t')] p_g dt' \quad (4.6)$$

formában írható le analitikusan. A (4.6) egyenlet első tagja a t időpillanatban bekövetkező nukleációk számát jelenti, figyelembe véve a rendszerben lévő még informálatlan egyedek csökkenő $1 - q(t)$ mennyiségét.

A második tag a klaszternövekedést adja meg az integrál segítségével a klaszter magjának nukleációjától kiindulva. $S(t, t')$ értékét a (4.5) egyenlet adja meg. Elvárható, hogy a (4.6) egyenlet jó egyezéssel leírja a rendszer makroszkopikus időfejlődését, legalábbis ha a klaszternövekedés jóval intenzívebben jelentkezik, mint a nukleáció, azaz $p_n \ll p_g$. A 4.4 ábrán jól látható az egyezés a numerikus eredmények és az analitikus becés között $\alpha = 10$ és $\beta = 10^{-2}$ paraméterek mellett.

Természetesen ha növeljük β , vagy csökkentjük α értékét, mind jelentősebbé válik a klaszterek összeolvadása az időfejlődés során, s így mind nagyobb különbség jelentkezik az eredményekben. Elsősorban a $p_g < p_n$ határ átlépése után.

4.3. A rendszer mikroszkopikus viselkedése

A 4.3 ábrán látható, hogy az időfejlődés t időpillanatában a rendszerben lévő klaszterek mérete igen széles tartományban változhat. A legkisebb lehetséges $S = 1$ méretű klaszterek azok, amik épp az aktuális t időpillanatban keletkeztek, azaz egyetlen, a külső hatás eredményeként informálttá vált egyedből állnak. Ha a klaszterek összeolvadását elhanyagoljuk, úgy a rendszerben fellelhető legnagyobb klaszterek mérete t időpillanatban $S_{max} = Ct^2$. Ezek a klaszterek a $t = 0$ időlépésben kellett hogy keletkezzenek. Ahogy azt az előzőekben láttuk, kellően alacsony $p_n \ll p_g$ nukleációs szint mellett a klaszterek kellőképpen ritkán helyezkednek el a hálón ahhoz, hogy a klaszterek növekedése dominánssá válhasson a nukleációval szemben. Ilyen feltételek mellett a klaszterek aktuális mérete egyedül keletkezésük időpontjától azaz a klasztert alkotó első egyed nukleációjának idejétől függ.

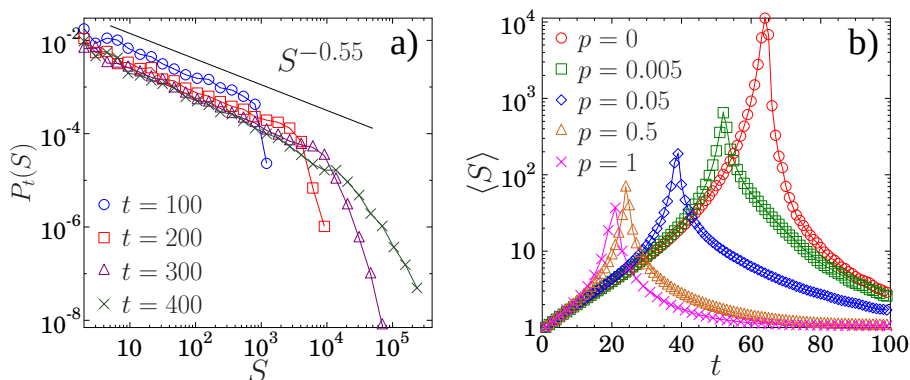
4.3.1. A klaszterek méreteloszlása

A t' időpillanat kis dt' sugarú környezetében keletkezett klaszterek dN darabszáma analitikusan megadható a $dN = [N_0 - N(t')]p_n dt'$ formában. Ha a t időpillanatban a rendszerben lévő már informált egyedek $N(t)$ darabszáma elhanyagolható a rendszer méretéhez képest, azaz $N(t) \ll N_0$, és alkalmazzuk a 4.5 egyenletben leírt növekedési törvényt, t időpillanatban a klaszterek méretének $P_t(S)$ eloszlását

$$P_t(S) \simeq \frac{p_n N_0}{2C^{1/2} S_{max}^{1/2}} S^{-1/2} \quad (4.7)$$

formában kapjuk meg. Az eloszlás hatványfüggvénynek adódik $\tau = 1/2$ exponenssel, ahol időfüggés egyedül a maximális klaszterméretben figyelhető

meg: $1 < S < S_{max}(t)$. A 4.5.(a) ábra különböző időpillanatokban mutatja egy rendszerben található klaszterek méreteloszlását. Ebben az esetben az $\alpha = 10^{-1}$ és $\beta = 10^{-7}$ értékeket szándékosan úgy választottuk meg, hogy az időfejlődés során a növekedés domináljon, illetve csak ritkán fordulhasson elő klaszterek összeolvadása.



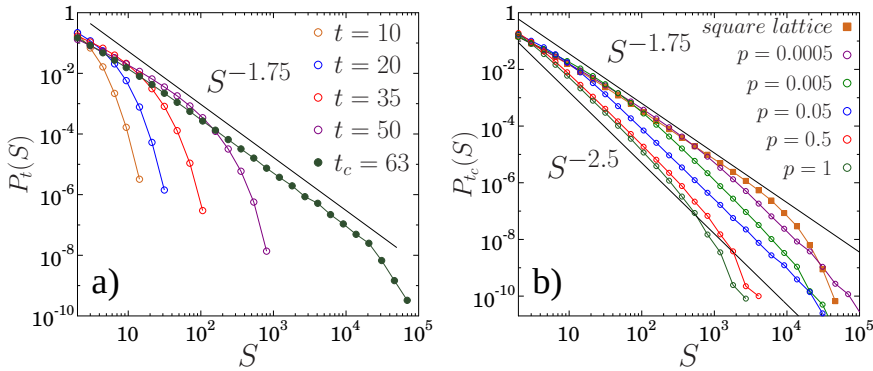
4.5. ábra. (a): A klaszterek méreteloszlása különböző időpillanatokban. (b): Az átlagos klaszterméret a t idő függvényében ábrázolva. A különböző színű görbék különböző p átkötési valószínűséggel előállított hálózatok esetére készültek. A paraméterek értéke: $\alpha = 10^{-1}$, $\beta = 10^{-7}$

A fenti megkötések alkalmazva előzetes analitikus becslésünk jó egyezést mutat a szimulációkkal. Az idő múlásával a szimulációs eredmények távolodni kezdenek a (4.7) egyenletben adottaktól, melyek okaként két, az egyenletben leírásra nem kerülő mechanizmust tehetünk felelőssé: (i) Az informált egyedek növekvő száma mind kevesebb és kevesebb teret enged új klaszterek keletkezéséhez, tehát idővel a nukleációk száma le kell, hogy csökkenjen. Emiatt a későbbi időpillanatokban kevesebb kisméretű klasztert figyelhetünk meg. (ii) Az idő múlásával mind jelentősebb hatássá válik a nagyobb klaszterek összeolvadása, aminek eredményeképp nagyobb, de ritkábban előforduló klaszterek képződnek a rendszerben. Számítógépes szimulációk segítségével kimutattuk, hogy a klaszterek méreteloszlása az idővel változik, exponense egy határértékhez tart.

Hogy megértsük a klaszterek növekedésének és méreteloszlásuk változásának módját, a rendszerben található $\langle S \rangle$ átlagos klaszterméretet vizsgáltuk a t idő függvényeként. $\langle S \rangle$ meghatározásához a klaszterek méreteloszlásához tartozó második és első momentum hányadosát vettük:

$$\langle S \rangle(t) = \frac{\sum_i S_i^2}{\sum_i S_i}, \quad (4.8)$$

ahol S_i az i . klaszter méretét jelenti t időpillanatban [87]. A momentumok számításakor a legnagyobb méretű klasztert mindig kihagyjuk. A 4.5(b) ábrán jól látható, hogy $\langle S \rangle(t)$ minden esetben igen karakteres maximummal rendelkezik, ami a rendszerben a növekedés és összeolvadás hatására felbukkanó óriásklaszterre utal. A maximum helye megadja a rendszer t_c kritikus időpillanatát. Az óriásklaszter jelenléte a további $t > t_c$ időpillanatokban azt jelenti, hogy az egyedek makroszkopikusan is jelentős hányada már informált, azaz tud az innovációról. Érdekes megfigyelni, hogy ugyan kvalitatív szempontból $\langle S \rangle(t)$ alakja minden esetben megegyezik, a szociális hálózat véletlenszerűségét jellemző p átkötési valószínűség növelésével a növekedési folyamat felgyorsul, amit t_c helyének balra történő elmozdulása jelez.



4.6. ábra. (a): A klaszterek $P_t(S)$ méreteloszlása négyzetrácson különböző t időpillanatokban, (b): Az óriásklaszter megjelenésének t_c kritikus idejében megfigyelt klaszterméret eloszlás különböző p átkötési valószínűséggel előállított topológiák esetében.

Következő lépésként a klaszterek t időtől függő $P_t(S)$ méreteloszlását vizsgáltuk meg számítógépes szimulációkkal. A 4.6(a) ábra négyzetrács topológián ($p = 0$) különböző t időpillanatokban mutatja a rendszerben jelenlévő klaszterek méreteloszlását egészen a t_c kritikus pontig $\alpha = 0.1$ és $\beta = 0.01$ paraméterértékek esetén. Ilyen paraméterértékek mellett a méreteloszlásban alig-alig fedezhető csak fel a (4.7) egyenlet alapján kapott kezdeti $1/2$ -es exponensű hatványfüggvény. Ehelyett az eloszlás egy sokkal meredekebb hatványfüggvényhez tart, exponenciális levágással. Megfigyelhetjük, hogy a t_c kritikus időponthoz közelítve a klaszterméretek mind szélesebb spektruma van jelen a rendszerben, míg végül $t = t_c$ -ben kiváló minőségű hatványfüggvényt kapunk. Eszerint

$$P_t(S) \sim S^{-\tau}, \quad (4.9)$$

ahol a τ exponens értéke a szimulációk alapján $\tau = 1.75 \pm 0.05$.

Fontos megválaszolandó kérdés, hogy az egyedek szociális hálózatának topológiája hogyan befolyásolja az informált klaszterek $P_t(S)$ méreteloszlását, illetve a τ exponens értékét. A 4.6(b) ábra a $t = t_c$ kritikus időpillanatban megfigyelt $P_{t_c}(S)$ klaszter-méreteloszlást mutatja különböző hálózatokon, melyeket a p újrakötési valószínűség kontrolljával hoztunk létre. Figyeljük meg, hogy a rendszerben az átkötésekkel megjelenő hosszútávú kapcsolatok elsősorban a nagyméretű klaszterek mérettartományában hatnak a méreteloszlásra. Ahogy a p átkötési valószínűséget folyamatosan növeljük, a négyzetrácson megfigyelt $\tau = 1.75 \pm 0.05$ exponensű hatványfüggvényből átmenet figyelhető meg egy $\tau = 2.5 \pm 0.07$ exponensű hatványfüggvénybe. A két hatványfüggvény közötti átmenet helye a p átkötési valószínűség növelésével csökken.

Fontos hangsúlyozni, hogy a négyzetrácson megfigyelt, a terjedési folyamatot jellemző $t = 1.75 \pm 0.05$ exponens értéke szignifikáns különbséget mutat a négyzetrácson vizsgált egyszerű kétdimenziós perkolációnál az irodalomban megfigyelt $\tau_p \approx 2.05$ [88] exponenshez viszonyítva. Ugyanakkor a hosszútávú kapcsolatok megjelenésével τ értéke egybeesik a véletlen háló-

kon végbemenő perkolációnál megfigyelt $\tau_p = 5/2$ exponenssel [42, 54, 55]. Skálafüggetlen hálózatokon végzett szimulációink ebben az esetben nem mutattak releváns különbséget a $p = 1$ átkötési valószínűséggel újrakötött, azaz véletlen hálózathoz viszonyítva.

4.3.2. A klaszterek geometriai jellemzői

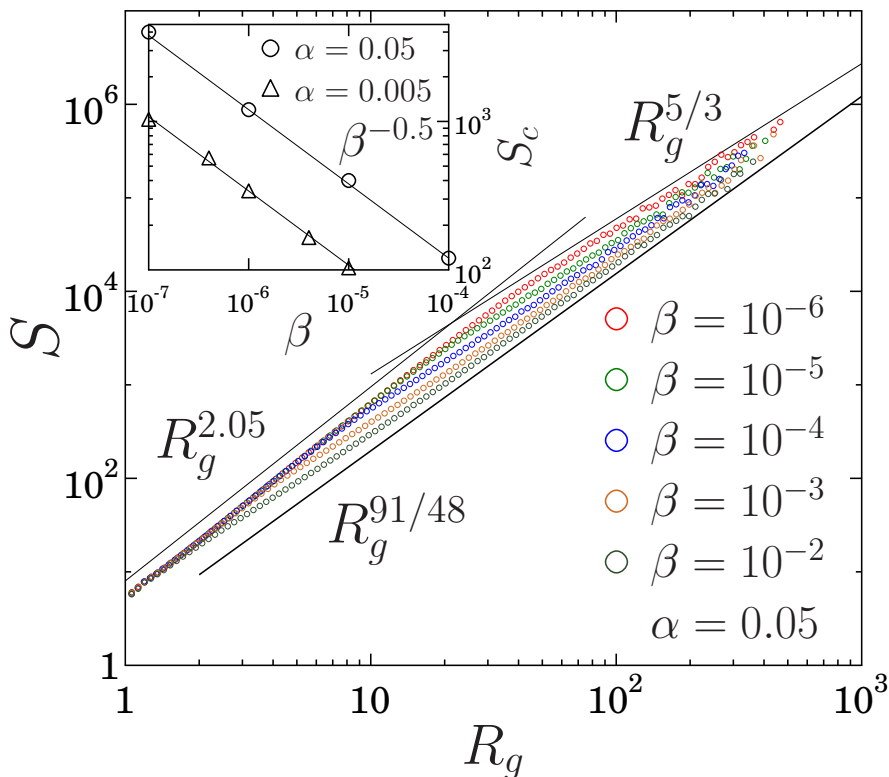
A 4.3 ábrán látható, hogy négyzetrács topológián a keletkező kisebb klaszterek mind kompaktak, míg a nagyobbak igen rendezetlen szerkezetűek. Belsejükben lyukak találhatók, kerületük pedig szabálytalan. Hogy meghatározzuk a klaszterek geometriai tulajdonságait, azok *girációs sugarát* vizsgáltuk. A klaszterek R_g girációs sugarát a következő definíció szerint értelmeztük:

$$R_g^2 = \frac{1}{S(S-1)} \sum_{i \neq j=1}^S (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2, \quad (4.10)$$

ahol $\vec{r}_i$ az i , míg $\vec{r}_j$ a j egyed klaszteren belüli helyzetét jelöli. A 4.7 ábrán a klaszterek S méretét ábrázoltuk R_g girációs sugaruk függvényeként különböző β értékekre. Érdekes megfigyelni, hogy $S(R_g)$, mint függvény két különböző szakaszon, két különböző exponensű hatványfüggvényből tevődik össze. Eszerint S megadható

$$S \sim R_g^D \quad (4.11)$$

formában, figyelembe véve a következőket: Mivel a kisméretű klaszterek kompaktak, jellemezhetők $D = 2$ dimenzióval, a nagyobb méretű klaszterek esetében azonban diffúz szerkezetük miatt átmenet figyelhető meg egy szignifikánsabb kisebb $D \approx 5/3$ fraktáldimenzió értékhez. Az átmenet helyét egy S_c kritikus klasztermérettel adjuk meg, melynek értéke szimulációink alapján egyedül a β paramétertől függ. Alacsony nukleációs szinten, azaz $\beta \ll \alpha$ esetén a klaszterek szabadon nőhetnek és csak a legnagyobb klasztereknél figyelhető meg összeolvadás. A 4.7 ábrán látható, hogy β növelésével az átmenetet jelentő S_c klaszterméret csökken, míg a D fraktáldimenzió növekszik. A jelenség oka, hogy növekvő β értékek esetében a rendszerben egyre



4.7. ábra. A rendszerben kifejlődő klaszterek mérete girációs sugaruk függvényében ábrázolva. R_g növekedésével $S(R_g)$ tetszőleges β esetén átmenetet mutat két különböző kitevőjű hatványfüggvény között. Az az S_c klaszterméretnél következik be. (belső ábra): S_c átmeneti klaszterméret β függvényeként az α két különböző értéke esetén.

inkább a nukleáció uralkodik, alig hagyva teret a klaszterek összeolvadásából származó hatásoknak. Az időfejlődés így igen közel kerül a perkolációhoz, s ebből következően míg S_c értéke folyamatosan csökken, a D fraktáldimenzió a perkoláló klaszterek fraktáldimenziójához, $D = 91/48$ -hez tart [88].

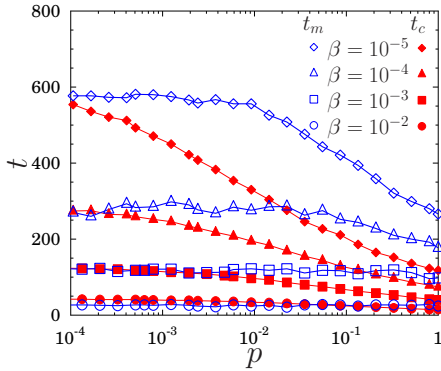
A 4.7 ábra belső ábrája az S_c átmeneti klaszterméretet mutatja β függvényeként. Ebben az esetben is hatványfüggvény viselkedést figyelhetünk meg

$$S_c \sim \beta^{-\kappa}, \quad (4.12)$$

ahol a $\kappa = 1/2$ exponens értéke függetlennek bizonyult az α paraméter értékétől.

4.4. A klaszterstruktúra hatása a terjedésre

Ha a külső, vertikális információs csatorna erősségét alacsonynak vesszük, azaz $\beta \ll \alpha$, a legtöbb egyed szociális kapcsolatain keresztül jut a szükséges információhoz. Ebben az esetben a klaszterek szerkezete jelentős hatást gyakorolhat a még nem informált egyedek felé irányuló információáramlás hatékonyságára. Természetesen ekkor felmerül a kérdés, hogyan befolyásolja a t_c kritikus időpontban megjelenő óriásklaszter a terjedési folyamatot.



4.8. ábra. t_c és t_m kritikus időpillanatok a p átkötési valószínűség függvényeként ábrázolva.

Hogy a kérdésre kvantitatív választ adjunk, a 4.8. ábrán ábrázoltuk a t_c kritikus pont valamint a t_m maximális adaptációs szám helyét a p újrakötési valószínűség függvényeként különböző $\beta \ll \alpha$ értékek esetén. Emlékezzünk vissza, hogy a korábban írtak alapján t_c kritikus pont az óriásklaszter megjelenésének időpontja, ami az $\langle S \rangle$ átlagos klaszterméret t szerinti maximuma, t_m pedig a $\delta q(t)$ maximuma.

Az ábrán látható, hogy négyzetrácson, azaz $p = 0$ esetén, t_c és t_m értéke mindig egybeesik. Ennek oka, hogy a terjedés fő mozgatója ebben az esetben az egyedek közti horizontális információáramlás a klaszterek felületén. Az óriásklaszter megjelenésekor azonban négyzetrácson a szabad klaszterhatár mennyisége hirtelen lecsökken, ami egyúttal $\delta q(t)$ csökkenését is eredményezi. Ezzel szemben véges $p > 0$

átkötési valószínűség esetében az óriásklaszter már $\delta q(t)$ maximumának elérése előtt kifejlődik hála a hosszútávú kapcsolatoknak. Egész pontosan a p átkötési valószínűség növelésével a t_c kritikus időpillanat értéke csökken, míg eközben t_m alig változik.

A külső információs csatorna erősítésével (azaz a p_n nukleációs valószínűség növelésével) t_m mindinkább függetlenedik p értékétől. Amennyiben a rendszerben hosszútávú kapcsolatok vannak, az óriásklaszter megjelenése nem jár együtt az újonnan történő adaptációk mennyiségének csökkenésével. Sőt a $\delta q(t)$ mennyiséggel jelzett terjedési hatékonyság³ még tovább is nőhet. Figyeljük meg a 4.8 ábra szemi-logaritmikus ábrázolásán, t_c közel lineáris viselkedését, mely a p -hez kapcsolódó logaritmikus viselkedésre utal:

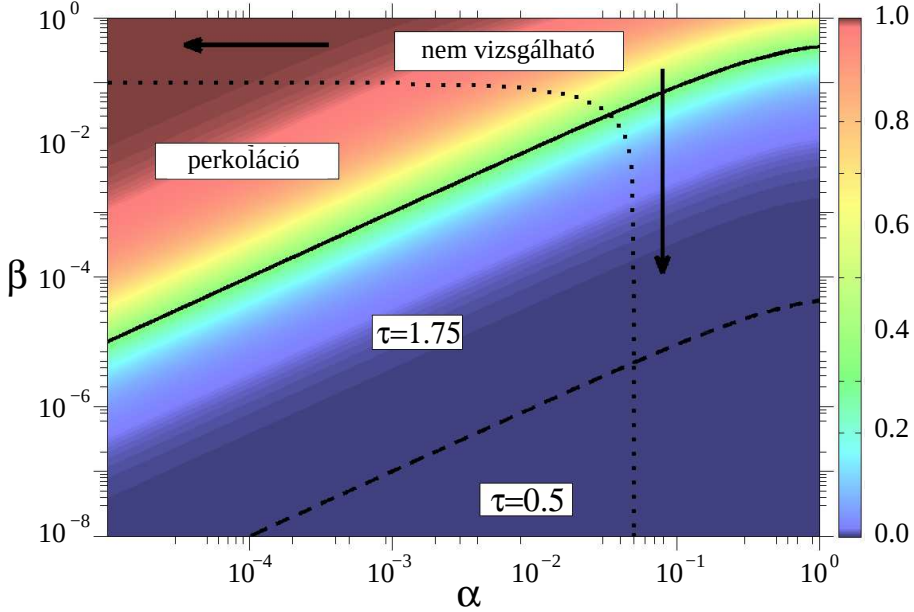
$$t_c \sim \ln p^{-1}. \quad (4.13)$$

4.5. A modell viselkedésének fázisai

Az előzőekben egy olyan információdinamikai modellt mutattunk be, melyben a külső (vertikális) és a belső (horizontális) információs csatornákon keresztül egyaránt áramlik információ a rendszer egyedei felé. A külső hatást valós életből vett példával gondolhatjuk egy termék, vagy technológia ismertségét segítő reklámkampánynak a médiában, míg a belső, egyedek közötti információáramlás megfelel a termék felhasználói közötti véleménycserének. Más szociális perkolációs modellekkel szemben, az általunk bemutatott modellben a termékkel/technológiával kapcsolatos külső információk nem csak az időfejlődés elején játszanak szerepet, hanem a teljes folyamatot végigkísérik.

A modell segítségével nem kívántuk modellezni, hogy az egyedek milyen véleménnyel rendelkeznek az adott innovációról, pusztán az számít, hogy tudják-e hogy létezik. A külső és belső információs csatornák egymáshoz

³Mivel $\delta q(t)$ a t időpillanatban informálttá váló egyedek mennyisége, értelemszerűen felfogható a terjedés t időpillanatbeli hatékonyságaként.



4.9. ábra. A modell viselkedésének fázisait bemutató fázisdiagram. A szaggatott-, és folytonos vonalak a kompakt növekedést, és a tiszta perkolációt választják el az általunk felismert új viselkedésforma fázisától. A pontozott vonalon kívül a rendszer viselkedése szélsőséges, nem vizsgálható (egy lépésben végállapotba kerül, vagy kisszámú kompakt klaszter nő). A színek a növekedés és a nukleáció arányát, azaz a p_n/p_g értéket jelöli.

viszonyított fontosságának változtatásával tanulmányoztuk a rendszer makroszkopikus időfejlődését és mikroszerkezetét is. Makroszinten a rendszert a már informált egyedek aránya és a még nem informált egyedek informálódásának intenzitása jellemzi. Az informált egyedek klaszterizálódnak, s növekvő és összeolvadó klaszterei a teljes szociális hálózatra kiterjednek.

Számítógépes szimulációk segítségével kimutattuk, hogy az informált egyedek aránya a rendszerben az innováció-diffúzió más modelljeinél is szokásos formában alakul az idő függvényében [75]. Analitikus leírást adtunk az informált egyedek arányának alakulására, amennyiben a klaszterek növekedése domináns a terjedés szempontjából.

Tapasztalataink szerint a rendszer mikroszintű struktúrája nagyban függ a két információs csatorna versengésétől, melyet legkönnyebben a nukleáció és a terjedés valószínűségének arányával írhatunk le. Hogy a rendszer viselkedéséről tisztább képet alkothassunk, fázisdiagramot készítettünk az $\alpha - \beta$ paramétersíkon, melyet a 4.9. ábra mutat be. Amikor a klaszterek növekedése domináns, azaz a szaggatott vonallal jelölt $p_n/p_g \approx 5 \times 10^{-5}$ határ alatt, a klaszterek méreteloszlása hatványfüggvény $\tau = 1/2$ exponenssel. Ebben az esetben a rendszerben szereplő klaszterek kompaktak, fraktáldimenziójuk $D = 2$ mely az összeolvadások kezdetekor $D = 5/3$ -ba megy át. Abban az esetben, amikor a nukleáció, a klaszternövekedés és összeolvadás többé-kevésbé egymással egyensúlyban van jelen a rendszerben, azaz a $p_n/p_g \approx 0.1$ értéket jelző folytonos és a $p_n/p_g \approx 5 \times 10^{-5}$ értéket jelölő szaggatott vonalak között, a klaszterek méreteloszlása továbbra is hatványfüggvény jellegű, exponensének értéke viszont $\tau = 1.75$ -re nő. Amennyiben a nukleáció dominánssá válik, az informált egyedek száma néhány időlépésen belül kritikussá válik és a rendszerben a perkolációs viselkedés figyelhető meg. A 4.9 ábra pontozott vonalán kívül a rendszer egy időlépés alatt átlépi a perkolációs küszöböt (azaz minden egyed informálttá válik), vagy csak kisszámú kompakt klaszter fejlődik így klaszterezettségi struktúrája nem vizsgálható. Számítógépes szimulációkkal kimutattuk, hogy a rendszert jellemző, a két szélsőséges eset közötti, $\tau = 1.75$ exponenssel jellemzett tartományban a szociális kapcsolatok topológiája jelentős hatással van a terjedési folyamatra. A hálózatban szereplő hosszútávú véletlen kapcsolatok mennyiségének növelésével átmenet figyelhető meg a klaszterek méreteloszlásában egy az előbbtől még nagyobb $\tau = 2.5$ -ös exponensű hatványfüggvényhez. A valósághoz közelebbi skálafüggetlen hálózat bevezetése nem hoz jelentős változást a véletlen hálózathoz képest.

Kimutattuk, hogy a klaszterstruktúra a makroszkopikus időfejlődést illetve a terjedés gyorsaságát is befolyásolja. Amennyiben az egyedek közti információcsere a domináns, az összeolvadó klaszterek lecsökkentik a klaszterek összkerületét, ahol a terjedés végbemehet. Ennek következtében, amennyi-

ben négyzetrácson óriásklaszter jelenik meg, a terjedési folyamat rögtön lelassul, azaz a szolgáltató nagyobb külső információmennyiség bejuttatására kényszerül, hogy a terjedési folyamatot fenntarthassa [14, 75]. Ugyanakkor a valósághoz közelebb álló kisvilág hálózatokon az óriásklaszter megjelenése nem eredményez a négyzetrácson tapasztalthoz hasonló csökkenést a terjedési intenzitásban. A makroszkopikus klaszter megjelenésének t_c kritikus időpillanata logaritmikusan függ a hálózat rendezetlenségét jellemző p átkötési valószínűséggel.

Az előzőekben bemutatott modell szigorúan csak a termékkel, vagy technológiával kapcsolatos információ terjedésére fókuszál figyelmen kívül hagyva, hogy a rendszer egyedei, azaz a valós világ vásárlói végül a vásárlás mellett döntöttek-e vagy sem, illetve vásárlás után milyen véleményekkel vannak a termékről. A modellben továbbá csak egy termékkel kapcsolatos információ terjedését írjuk le, hiszen az, hogy egy termékről van információnk nem zárja ki, hogy más is ismerjünk. A továbbiakban vizsgálatainkat az információterjedés utáni folyamatokkal folytatjuk. Azaz az eddigiekben is használt módszerek segítségével tanulmányozzuk, mi történik a rendszerben a teljes informáltság elérése után, amikor vásárlásra valamint termékek és szolgáltatók versenyére kerül a sor.

5. fejezet

Új technológiák elterjedése

Az előző fejezetben új technológiákkal, innovációkkal kapcsolatos információk elterjedését vizsgáltuk társadalmi-gazdasági rendszerekben. A következőkben egy lépéssel későbbi piaci folyamatokra koncentrálunk. Feltételezzük, hogy vizsgálataink kezdetére a rendszer minden résztvevője informálódott egy adott innovációról, azonban azt más és más fejlettségű konkrét terméken keresztül használják. A terjedés folyamán új innováció már nem jelenik meg a rendszerben, azaz olyan technológiákat vizsgálunk, ahol az új technológiák versenye jóval gyorsabb lefolyású, mint az új termékek megjelenésének gyakorisága.

A különböző fejlettségi szintű termékek terjedését a korábbiakból már ismert sejtautomata-alapú „lentről-felfelé” módszer segítségével tanulmányozzuk. Munkánk során azokra az – úgynevezett hálózati – technológiákra koncentrálunk, melyek esetén a használhatóság, illetve az eszköz által nyújtott előnyök mértéke nagymértékben függ az adott technológiát használó szociális partnerek számától. Jó példaként szolgálhatnak a fentiekre a telekommunikációs technológiák, hiszen például egy mobiltelefon jórészt használhatatlan, ha nincs kit hívni rajta. A továbbiakban minden esetben a fent leírt telekommunikációs technológiákból fogunk kiindulni.

Az említett terjedési folyamatok vizsgálatának első lépése egy megfelelő modell megalkotása, ami hűen tükrözi a valós világban megfigyelt jelensé-

geket és tulajdonságokat. Jogosan feltételezzük, hogy a szociális rendszer résztvevői közötti információcsere nehézségekbe ütközik, ha azok különböző technológiai színvonalú eszközöket használnak. Ezen nehézségek mértékére a továbbiakban a résztvevők közötti interakció *költsége*ként hivatkozunk. A terjedés leírására és vizsgálatára létrehozott sejtautomata modellünk időfejlődését az egyedek költségminimalizációra való törekvése határozza meg: az egyedek technológiai szintet válthatnak, amennyiben az költségeik csökkenésével jár együtt.

Modellünkben fontos feltétel, hogy a technológiák terjedésének mechanizmusa a másolás. Az egyedek technológiai szintjük változtatásakor nem térhetnek át teljesen új technológiára, csupán valamelyik szomszédjukét másolhatják le. Ez a feltétel jelentősen csökkenti a modellezett rendszer időfejlődésének bonyolultságát, ugyanakkor bármikor bevezethető az új technológiák megjelenése, így a későbbiekben ez a szempont is vizsgálható. A modell részleteinek bemutatása után analitikus vizsgálataink eredményét ismertetjük, végül pedig valósághű sejtautomata szimulációinkból levont következtetéseket tárgyaljuk úgy négyzet rácson, mint komplex topológiákon.

5.1. Új technológiák elterjedésének modellezése társadalmi-gazdasági rendszerekben

Ahogy azt a 4. fejezet bevezetőjében már vázoltuk, társadalmi-gazdasági rendszerekben a technológiai fejlődés két lépése egyrészt az új innovációk megjelenése, másrészt azok elterjedése a rendszerben [75, 14, 86]. Utóbbi esetben a terjedés egyik legfontosabb eleme a másolás, azaz a rendszer résztvevői által jól definiált döntési mechanizmus eredményeként végzett adaptáció. Egyszerű piaci törvényszerűségekből kiindulva is világos, hogy a döntési mechanizmus elsődleges mozgatórugója legtöbb esetben valamilyen ár-érték szerinti megfontolás. Ennek eredményeként – ha a váltás számottevő előnyt biztosít a korábbi állapothoz képest – egyes technológiák a rendszer jelentős részében elterjednek más, alacsonyabb szintű technológiák kárára [14].

Feltételezzük, hogy a rendszer résztvevőinek lehetősége van több különböző alternatíva közül választani, s így megszerezni az adott probléma megoldására legalkalmasabb elérhető technológiát.

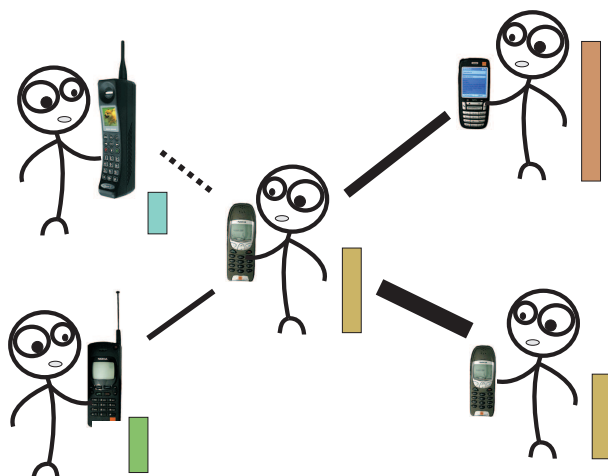
Az alábbiakban bemutatunk egy egyszerű modellt olyan technológiák elterjedésének modellezésére, melyeknél a résztvevők kapcsolatrendszere döntő szerepet játszik [14]. Ahogy azt korábban is említettük, példaként legtöbbször telekommunikációs technológiákra hivatkozunk, de gondolhatunk bármely más olyan technológiára is, amely esetében a kompatibilitás alapvető elvárás.

A való világban gyakran megfigyelhető jelenség, hogy annak ellenére, hogy a piacon jelen van egy magasabb technológiai szintet képviselő eszköz, a kevésbé fejlett megoldások uralkodnak. Ugyanakkor ha egy új technológia már a kezdetekkor kellően nagy súllyal jelenik meg a piacon, előbb vagy utóbb az egész közösséget elárasztja, s maga mögé utasítja a régieket. Vizsgálódásunk célja, hogy választ találjunk arra a kérdésre, vajon milyen konkrét követelményeknek kell teljesülnie ahhoz, hogy egy új technológia sikeres lehessen a piacon.

5.1.1. A kommunikáció költsége

Modellünkben a szociális-gazdasági rendszert a korábbiakhoz hasonlóan egyedei egy csoportjával adjuk meg. Az egyedei mindegyike egy-egy terméket birtokol, ezek segítségével kommunikálnak egymással. A különböző termékek (például mobiltelefon, vagy bármely más kommunikációra használt eszköz) technológiai fejlettségi szintjének mérőszámaként a τ valós változót adjuk meg, melynek mind magasabb értéke mind fejlettebb technológiát jelöl. A valós életből kiindulva megfigyelhetjük, hogy a résztvevők között a birtokolt technológián keresztüli kommunikáció akkor a legköltséghatékonyabb, ha a kommunikációban résztvevő felek azonos technológiai szintű terméket birtokolnak.

A kommunikációra használt eszközök közötti technológiai különbség nehézségeket vet fel az egyedei közötti interakcióban, mely végeredményben



5.1. ábra. A modell felépítésének áttekintése. Az egyedek különböző technológiai szintű termékeket (mobiltelefonokat) használnak kommunikációra. A termékek képességbeli különbsége (SMS-képes, MMS-képes, e-mail-képes, video-telefon-képes) nehézségeket vet fel a kommunikációban. A kommunikáció azonos technológiai szinten a legkönnyebb (ezt jelenti a megfelelő egyedek közti fekete vonal). A színes oszlop magassága az egyedek mellett a hozzá tartozó termék „technológiai szintjét” jelzi.

költségként jelentkezik. Hogy egy kézzelfoghatóbb példát mutassunk, vegyük az SMS kommunikációt. A technológia megjelenésekor készült készülékek legfeljebb 160 karakter hosszúságú üzenet küldésére voltak alkalmasak, míg a később készült eszközök háromszor ekkora hosszúságot is képesek voltak továbbítani. A két különböző készülék közötti SMS kommunikáció természetesen nem lehetetlen, mindössze annyit kell tennünk, hogy üzenetünket maximum 160 karakter hosszúságú részekre osztjuk, mégis jól érzékelhető, hogy milyen nem anyagi jellegű, újonnan felmerülő kellemetlenségekkel, illetve költségekkel kell számolnunk kevésbé kompatibilis eszközök közötti kommunikáció esetén. Amennyiben az ellenkező irányban kívánunk üzenetet küldeni, komolyabb tennivalónk nincs, hiszen az üzenetet telefonunk automatikusan feldarabolja. Az arra érkező válasz azonban, a másik

fél miatt, szintén csak részletekben lesz olvasható. Az itt leírtakat szemlélteti az 5.1 ábra.

Az előzőekben bemutatott egyszerű példa jól mutatja, hogy a nehézségek forrása esetünkben egyértelműen az egyedek által birtokolt eszközök technológiai szintjei közötti különbség. Figyeljük meg, hogy a nehézségek nem jelentkeznének, amennyiben minden, a kommunikációban résztvevő fél azonos technológiai szintű eszközt használna.

A fenti tulajdonságokat figyelembe véve indokolt, hogy az i és j egyedek közötti kommunikáció C költségét, a hozzájuk tartozó technológiai szintek közötti $|\tau_i - \tau_j|$ különbség monoton függvényeként adjuk meg. A matematikai vizsgálat megkönnyítése érdekében a kooperáció költségének leírására az alábbi egyszerű függvényalakot használjuk [89]:

$$C(i \rightarrow j) = a|\tau_i - \tau_j|. \quad (5.1)$$

Az (5.1) egyenlet alapján a másétől különböző technológiai szintű (különböző τ értékkel rendelkező) eszköz birtoklása költségeket von maga után, míg azonos fejlettségű eszközök esetén nem jelentkezik extra költség. Ez az egyszerű megközelítés lehetőséget ad egy olyan szociális-gazdasági rendszer modell szintű leírására, melyben érvényesül az egységes technológiai szintre való törekvés.

A való világban ugyanakkor jellemző, hogy a szolgáltatók, újabb és újabb termékeket vezetnek be a piacra, hogy megoldják a vásárlók jelenlegi vélt, vagy valós problémáit¹. A felhasználók így jellemzően a magasabb technológiai szint felé igyekeznek. Ezt az általános tendenciát modellünkben úgy ragadhatjuk meg, hogy az (5.1) egyenletben bevezetett a költségfaktor értékét függővé tesszük az egyedek relatív technológiai szintjétől. Ennek

¹Ahogy azt már korábban említettük, modellünkben az időfejlődés során nem jelennek meg új technológiák, a társadalmi rendszerekben megfigyelhető széles termékskála viszont egyértelműen a felhasználói igények kielégítésére tett próbálkozások eredménye. Ezt a széles termékskálát igyakszik modellünk visszaadni a kezdeti rendezetlen állapottal.

megfelelően a értéke

$$a = \begin{cases} a_1, & \text{ha } \tau_i > \tau_j \\ a_2, & \text{ha } \tau_i < \tau_j \end{cases} \quad \text{ahol} \quad a_1 < a_2 \quad (5.2)$$

ami egyértelműen a magasabb technológiai szintű termékek előnyét jelenti.

Az $a_1 < a_2$ feltétel következtében az egyedeknek az őket körülvevőknél nagyobb $\tau_i > \tau_j$ technológiai szintet birtokolni kevesebb költséget jelent, mint az ellenkező eset. Természetesen ennek következtében a (5.1) költségfüggvény nem szimmetrikus i -re és j -re nézve. C ezen tulajdonságát az argumentumban szereplő $\rightarrow$ nyíllal jelöljük. Ennek megfelelően $C(i \rightarrow j)$ az i egyed j -vel folytatott kommunikációjának költségét jelenti, mely nem feltétlenül azonos a j egyed i -vel folytatott kommunikációjának $C(j \rightarrow i)$ költségével, azaz $C(i \rightarrow j) \neq C(j \rightarrow i)$.

Fontos hangsúlyoznunk, hogy modellünkben a *költség* nem egyértelműen csak a kommunikációért vagy az eszközért fizetendő pénzt jelenti, hanem bármilyen az interakció során felmerülő anyagi és nem anyagi jellegű költséget magába foglalhat [89, 90].

Miután mostanra ismerjük a kommunikáló felek közötti kommunikáció költségét, leírhatjuk az i egyedre jellemző összesített költséget. Ha az i egyednek n kommunikációs partnere van rendre $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ technológiai szintekkel, a rá értelmezett teljes költség értéke a szomszédjaival vett (5.1) kommunikációs költségek egyszerű összege, azaz

$$C(i) = \sum_{j=1}^n C(i \rightarrow j). \quad (5.3)$$

5.1.2. Időfejlődés

Hogy költségüket csökkenteni tudják, feltételezzük, hogy az egyedek képesek technológiai szintjük megváltoztatására. Ennek eredményeként nem-triviális időfejlődést figyelhetünk meg a rendszerben. Mivel az egyedek nem képesek innovációra, a lehetséges technológiai szintek skálája az inicializálás pillanatában eldől. A rendszer evolúciójának mozgatórugója az egyedek aziránti

igyekezete, hogy költségüket minél inkább optimalizálják, azaz csökkentse a hozzájuk tartozó C értéket. Mindazonáltal erre csak úgy nyílik lehetőségük, hogy technológiát adoptálnak/másolnak át valamelyik szomszédjuktól, másszóval valamelyik partnerükével kompatibilis terméket vásárolnak. A $t + 1$ időpillanatban vett teljes költség az i egyed esetén eszerint

$$C^{t+1}(i) = \min\{C(\tau \in \{\tau_i^t, \tau_1^t, \tau_2^t, \dots, \tau_n^t\})\}, \quad (5.4)$$

ahol a technológia másolása megy végbe minden olyan esetben, amikor az a költségek $C^{t+1}(i) < C^t(i)$ csökkenésével jár.

Modellünkben feltételezzük, hogy a technológia átvétele valamely szomszédtól költségmentesen történik, azaz nincs szükségünk pénzre, hogy új eszközt vásároljunk. Ennek következtében az egyedek minden esetben technológiai szintet váltanak, amikor az a későbbiekre nézve költségcsökkentést jelent. Az egyedek anyagi lehetősége, az általuk birtokolt pénz mennyisége, a társadalomra jellemző jövedelem modellünk jelen formájában nem játszik szerepet, de természetesen későbbi továbbfejlesztett változatokban könnyen implementálható. Az itt ismertetett lokális költségminimalizáción alapuló átvétel/elutasítás folyamat az adoptált technológiák elterjedését eredményezi, míg az általánosan elutasításra kerülő technológiák fokozatosan eltűnnek a rendszerből.

Hangsúlyozzuk, hogy az innovációk elterjedésének elsődleges komponense a másolás, mely segítségével az egyedek csökkenteni tudják egymás közti inkompatibilitásukat és ezzel a kommunikációjuk során felmerülő nehézségek (a kommunikáció költsége) mértékét is. Figyeljük meg, hogy a modellben nincs explicit előny rendelve a magasabb technológiai szintekhez. A rendszeren belüli konszenzus elérése után a kommunikáció költsége minden esetben megegyezik, függetlenül a felvett technológiai szint pontos értékétől [89, 90].

5.1.3. A szociális kapcsolatok topológiája

Egyed-alapú szociodinamikai modellek esetében döntő fontosságú, hogy miképp modellezzük az egyedek közötti szociális kapcsolatok hálózatát. Modellünkben a 3.4 fejezetben már említett Watts-Strogatz módszert használtuk

olyan hálózati topológiák előállításához, melyek megfelelően tükrözik a valós világban megfigyelt emberi kapcsolati hálózatok szerkezetét [44, 90].

5.2. A modell analitikus vizsgálata

Hogy megértsük az egyedek döntési mechanizmusát, melynek eredményeként kiválasztják, hogy mely technológiát vegyék át, érdemes egyszerűsített esetekre analitikus számításokat végezni. Először azt az esetet tekintjük, amikor minden egyed egyszerre képes kommunikálni a rendszer összes többi egyedével, függetlenül azok elhelyezkedésétől. Ezután megvizsgáljuk a döntési folyamatot kisméretű izolált rendszerrészekben. A fentiek vizsgálata után úgynevezett „mester egyenlet” megközelítés szerinti vizsgálatokat végzünk a rendszeren [91]. Utóbbi vizsgálatok eredményeként érdekes fixpontokat fedezhetünk fel a rendszer paraméterterében. Ezek a fixpontok kihatással vannak a hosszútávú időfejlődésre, illetve a teljes rendszer technológiai fejlődésére.

5.2.1. Átlagtér közelítés és vizsgálatok lokalizált részrendszerekben

Egyszerű kiinduló esetként tekintsük egy olyan, nagyszámú egyedből álló rendszert, melyben minden egyed véletlenszerű technológiai szinttel rendelkezik a $\tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max}$ intervallumból $p(\tau)$ valószínűségi sűrűséggel, $P(\tau) = \int_{\tau_{min}}^{\tau} p(\tau') d\tau'$ eloszlásfüggvény szerint. Feltételezzük, hogy minden egyed minden más egyeddel kommunikációs kapcsolatban áll. Így a kommunikáció költsége egy τ technológiai szintű terméket birtokló egyed esetében

$$C(\tau) = a_1 \int_{\tau_{min}}^{\tau} (\tau - \tau') p(\tau') d\tau' + a_2 \int_{\tau}^{\tau_{max}} (\tau' - \tau) p(\tau') d\tau' \quad (5.5)$$

formába írható τ függvényeként. A következő időlépésben minden egyed technológiai szintjét τ -ról arra a τ^* -ra változtatja, ami mellett az (5.5) költségfüggvény minimális értéket vesz fel, azaz $dC/d\tau|_{\tau^*} = 0$. A minimális

költség eléréséhez másolandó technológiai szint értékét végül

$$P(\tau^*) = \frac{1}{1 + 1/r} \quad (5.6)$$

formában kaphatjuk meg, ahol $r = a_2/a_1$ az a_1 és a_2 költségfaktorok hányadosa, P pedig az egyedek technológiai szintjének valószínűségi eloszlásfüggvénye a kezdeti állapotban. Az (5.6) egyenlet egy implicit kifejezés τ^* -ra, amit P ismeretében analitikusan, vagy numerikusan tudunk megoldani. A fenti számítások fontos mondanivalója, hogy az eredmény nem függ a_1 és a_2 pontos értékétől, kizárólag a fejlettebb technológia által a fejletlenebb technológiához képest nyújtott relatív előnyök $r = a_2/a_1$ mértékétől. Mivel jelen esetben a kölcsönhatás hatótávolsága végtelen, minden egyed egyetlen lépés után azonos döntést hoz. Így a rendszer időfejlődésének végéhez érkezik, minden egyed által azonosan a τ^* technológiai szintet átvéve.

Az $r = 1$ speciális esetben (amikor a magasabb technológiai szint semmilyen előnnyel nem jár), minden egyed a kezdeti $p(\tau)$ valószínűségi eloszlás úgynevezett mediánjának megfelelő $\tau^* = m$ technológiai szintet veszi át [92]. Érdeemes megjegyezni, hogy a $\tau^*(r)$ optimális kiválasztott technológiai szint r monoton növekedő függvénye, ugyanakkor a τ_{max} maximális technológiai szintet egyedül a $\lim_{r \rightarrow \infty} \tau^*(r) = \tau_{max}$ határesetben választják a rendszer egyedei. Véges $r > 1$ esetén a nagymennyiségű alacsony technológiai szintet képviselő egyed képes rákényszeríteni a rendszert az alacsonyabb technológiai szintre, ami azt jelzi, hogy a teljes rendszerre vonatkoztatott technológiai fejlődés szempontjából egy erősen csatolt szociális hálózati topológia negatív hatással bír.

Következő lépésként figyeljük meg, mi történik komplexebb közösségek esetében kisméretű lokális részrendszerek szintjén. Vegyünk egy n elemből álló véges kis közösséget, melyben az egyedek technológiai szintje rendre $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$. A τ_i technológiai szintű i egyed összesített kommunikációs költsége a maradék $n - 1$ egyed felé (5.3) alapján

$$C(\tau_i) = a_1 \sum_{j=1}^{i-1} (\tau_i - \tau_j) + a_2 \sum_{j=i+1}^n (\tau_j - \tau_i). \quad (5.7)$$

formában adható meg. A következő időlépésben az egyednek döntenie kell, hogy $n - 1$ szomszédja közül melyik az, amelynek technológiai szintjét átveve minimalizálni tudja a rá értelmezett (5.7) költségfüggvényt. Analitikus számításaink ismét kimutatták, hogy ez a döntés egyedül r értékétől függ (azaz a költségfaktorok pontos értéke nem számít, csak a hányadosuk). Egészen pontosan az egyed az i . legnagyobb technológiai szintet fogja lemásolni ($\tau^* = \tau_i$), amennyiben r értéke az alábbi intervallumba esik:

$$\frac{i-1}{n-i+1} < r < \frac{i}{n-i} \quad 1 \leq i < n \quad \text{esetén,} \quad (5.8)$$

$$n-1 < r \quad i = n \quad \text{esetén.} \quad (5.9)$$

Vegyük észre a fenti egyenlet alapján, hogy az r -re megfigyelt részintervallumok határai szimmetrikusak $r = 1$ -re². A legfejlettebb $\tau^* = \tau_n$ technológiát csak akkor veszi át az egyed, ha $r > n - 1$. Természetesen τ^* pontos értékét a fenti egyenletből nem lehet meghatározni, hiszen a rendszer számos ehhez hasonló kisebb közösségből épül fel, melyek mindegyikében véletlenszerű τ kezdeti technológiai szintekkel rendelkeznek az egyedek. Éppen ennek köszönhető viszont, hogy a rendszerben az (5.8) és (5.9) egyenletek által vezérelt igen érdekes komplex időfejlődést figyelhetünk meg.

5.2.2. Mester egyenlet alapú megközelítés

Egy újabb lépéssel a komplexebb rendszerek felé haladva vegyünk ezúttal egy olyan esetet, melyben csak két különböző $\tau_0 < \tau_1$ technológiai szint kap helyet, viszont az egyedeket a valósághoz közelítő hálózati topológián helyezzük el, melynek fokszámoszlása³ ρ . Az egyszerűség kedvéért, s mivel számításaink általánosságát nem befolyásolja, vegyünk a technológiai szinteket $\tau_0 = 0$ és $\tau_1 = 1$ értékűnek. Legyen a kezdeti $t = 0$ időpillanatban az egyes technológiai szinteket birtokló egyedek aránya a rendszerben rendre $\phi_{t=0}^0$ és $\phi_{t=0}^1 = 1 - \phi_{t=0}^0$.

² i helyére $(n-i+1)$ -et behelyettesítve épp az i -re kapott intervallumhatárok reciprokait kapjuk vissza

³lásd 3.4 fejezet

Célunk ezúttal egy olyan mester egyenleten alapuló megoldás kidolgozása, mely segítségével leírhatjuk a rendszer hosszútávú időfejlődését mind a költségfaktorok r hányadosának, mind a szociális kapcsolatok topológiáját meghatározó p átkötési valószínűség függvényében. Mivel a rendszerben csak két különböző technológiai szintet szerepeltetünk ezt az átfogó leírást pusztán azok t időpillanatban vett ϕ_t^0 és ϕ_t^1 rendszerbeli arányának meghatározásával megadhatjuk.

Tételezzük fel, hogy az egyedek tökéletesen véletlenszerűen helyezkednek el a rendszerben, így technológiai szint szerinti korrelációjuk elhanyagolható. Leírásunkban emiatt mellőzhetünk minden a térbeli elhelyezkedéssel kapcsolatos korrelációs hatást.

Amikor egy τ_0 technológiai szintű egyed szociális partnereivel kommunikál, az 5.1 fejezetben bevezetett (5.3) költségfüggvény segítségével ki tudjuk fejezni a τ_1 technológiai szinttel rendelkező szomszédok azon minimális k számát, mely mellett a vizsgált egyed a következő időlépésben szintén τ_1 technológiai szintre vált⁴:

$$k > n \frac{1}{1+r} \equiv np_h, \quad (5.10)$$

ahol n az egyed szomszédainak száma. Az (5.10) egyenletben szereplő p_h a továbbiakban jelölje a $\tau_1 = 1$ technológiai szintet birtokló szomszédok ahhoz szükséges minimális arányát, hogy a váltás megtörténjen,

Az (5.10) egyenletből ezután már ki tudjuk számolni annak $p_t^{0 \rightarrow 1}$ *átváltási valószínűségét*, hogy a vizsgált τ_0 technológiai szinttel rendelkező egyed t időpillanatban τ_1 technológiai szintre vált. A $p_t^{0 \rightarrow 1}$ átváltási valószínűség alakja

$$p_t^{0 \rightarrow 1} = \sum_n \rho_n \sum_{k=\lceil np_h \rceil}^n \binom{n}{k} (1 - \phi_{t=0}^0)^k (\phi_{t=0}^0)^{n-k}. \quad (5.11)$$

⁴ Jegyezzük meg, hogy jelen modellben a 4 fejezetben használttal szemben az állapotváltás determinisztikus, azaz feltételei egyértelműen megadhatók: Az egyed akkor vált τ_0 -ról τ_1 technológiai szintre, ha teljes költsége τ_1 érték mellett kisebb, mint τ_0 technológiai szint mellett.

A fenti egyenletben ρ_n a felhasznált topológia fokszámoszlását jelenti, $[\cdot]$ pedig a csomagolófüggvényt, melynek eredménye a paraméterként megadott számnál nagyobb legkisebb egész szám. A (5.11) egyenletben azzal az egyszerűsítő feltételezéssel élünk, hogy a rendszer minden időlépésben tökéletesen véletlen állapotból indul, azaz csak ϕ_t^0 és ϕ_t^1 értéke változik az idővel, a technológiákkal rendelkező egyes egyedek térbeli elhelyezkedéséről nincs információnk.

Az előzőekkel ellentétes irányú technológiai szintváltás esetében arra vagyunk kíváncsiak, hogy mi a valószínűsége, hogy egy adott időpillanatban egy τ_1 technológiai szintű egyed τ_0 -ra vált. Az ennek leírására szolgáló analitikus forma, r szimmetrikus mivolta miatt, alig különbözik az előzőtől. A valószínűség meghatározásához mindössze az előző (5.11) egyenlet második szummájának határait kell megváltoztatnunk:

$$p_t^{1 \rightarrow 0} = \sum_n \rho_n \sum_{k=0}^{k=\lceil np_n \rceil - 1} \binom{n}{k} (1 - \phi_{t=0}^0)^k (\phi_{t=0}^0)^{n-k}. \quad (5.12)$$

Vegyük észre, hogy a modell e speciális esetében $p_t^{1 \rightarrow 0} = 1 - p_t^{0 \rightarrow 1}$ hiszen csak két különböző technológiai szint van jelen a rendszerben.

Eddigi eredményeinket összegezve, mivel ismerjük a rendszerben jelen lévő technológiai szintek pontos ϕ_t^0 és ϕ_t^1 arányát és a technológiai szintváltások $p_t^{0 \rightarrow 1}$ és $p_t^{1 \rightarrow 0}$ valószínűségét t időpillanatban, kifejezhetjük a technológiai szintek arányára vonatkozó diszkrét fejlődési egyenleteket:

$$\phi_{t+1}^0 = \phi_t^0 + p_t^{1 \rightarrow 0}(1 - \phi_t^0) - p_t^{0 \rightarrow 1}\phi_t^0, \quad (5.13)$$

$$\phi_{t+1}^1 = 1 - \phi_{t+1}^0 = \phi_t^1 + p_t^{0 \rightarrow 1}(1 - \phi_t^1) - p_t^{1 \rightarrow 0}\phi_t^1. \quad (5.14)$$

Miután tehát megadjuk a technológiai szintek kezdeti $\phi_{t=0}^0$ és $\phi_{t=0}^1$ arányát, valamint az r költségfaktort, az (5.13) és (5.14) egyenletek alapján követhetjük a rendszer fejlődését. Az itt bemutatott mester egyenletes forma legnyilvánvalóbb előnye, hogy segítségével az időfejlődés legfontosabb jellemzőit sikerült analitikus formában is leírunk.

Kapcsolat véleményterjedési modellekkel

Fontos észrevenni, hogy modellünk az előzőek alapján tekinthető a többségi véleményen alapuló véleményterjedési modellek egy speciális fajtájának. Esetünkben a technológiák elterjedését nem az egyszerű többség dönti el, viszont a korábban bemutatott p_h kritikus arányon – így tulajdonképpen az r költségfaktoron – keresztül kontrollálható a rendszer dinamikája. Ehhez hasonló véleményterjedési modellel találkozhatunk P. Klimek és munkatársai cikkében [93], ahol viszont az egyedek döntését egyértelműen az ellenkező véleményű szomszédok p^h aránya határozza meg. Ugyanakkor ebben a modellben $k/n < 1 - p^h$ esetén épp az ellenkező véleményt választja másolásra az egyed, így lehetőséget adva, számos a homogéntől különböző végső állapot elérésére. Az általunk leírt modellben a technológiák másolása, a költségek csökkentésének igénye, különböző bonyolult mikroszkopikus döntések alapján ugyan, de minden $r \neq 1$ költségfaktorérték mellett konszenzushoz, azaz homogén végállapothoz vezet.

Stabil és instabil fixpontok

Hogy a rendszer hosszútávú időfejlődését felfedhessük, kritikus fontosságú az (5.13) és (5.14) mester egyenletek fixpontjainak vizsgálata. Az időfejlődés során a τ technológiai szintek arányának fixpontját a $\phi_{t+1}^\tau = \phi_t^\tau$ feltétel írja le, azaz a fixpontot akkor érjük el, ha a ϕ_t^τ arányok már nem változnak. Célunk, hogy azonosítsuk azokat az r költségfaktor különböző értékeihez tartozó $\phi_{t=0}^0$ és $\phi_{t=0}^1$ kezdeti arányokat, melyekből a rendszer különböző végállapotokba kerül. Az egyszerűség kedvéért tekintsük először az (5.14) egyenletet és tételezzük fel, hogy az egyedek egységesen 4 szociális kapcsolattal rendelkeznek (azaz 4 szomszédjuk van⁵). Alkalmazva a fixpont feltételt egyszerűen belátható, hogy az (5.14) egyenletnek r -től függően két, vagy három fixpontja van. Az $r < 1/3$ és $r > 3$ paramétertartományokban két fixpontot figyelhetünk meg, melyek közül az egyik stabil, míg a másik instabil. Ezek alapján a

⁵Választásunk célja, hogy eredményeink a későbbiekben összevethetők legyenek a reguláris négyzetrácsra kapottakkal.

rendszer ilyen feltételek mellett minden esetben homogén végállapotba kell, hogy kerüljön. Ebben az állapotban minden egyednek azonos a technológiai szintje, azaz csak az egyik technológia marad meg a rendszerben (lásd 5.2 ábra). Analitikus és numerikus számításokkal megmutattuk, hogy $r < 1/3$ esetén a $\phi_{c_1}^1$ fixpont stabil, míg a $\phi_{c_2}^1$ instabil, ahol

$$\phi_{c_1}^1 = 0, \quad \text{és} \quad \phi_{c_2}^1 = 1. \quad (5.15)$$

Ennek eredményeként ilyenkor garantáltan mindig a τ_0 alacsony technológia lesz sikeres a rendszerben, hiszen a $\phi_{c_1}^1 = 0$ stabil fixpont vonzáskörzete ebben az esetben a $\phi_0^1 \in [0, 1)$ intervallum. Az r költségfaktor e tartományában a rendszer mindig egy olyan, homogén állapotba konvergál, melyben $\phi_t^1 = 0$, azaz a magasabb τ_1 technológia teljesen eltűnik a rendszerből a kezdeti aránytól függetlenül – kivéve természetesen, ha $\phi_0^1 = 1$. $r > 3$ esetén az előzőekkel azonos (5.15) fixpontokat találunk, ugyanakkor azok stabilitási tulajdonságai megváltoznak. Ebben az esetben $\phi_{c_1}^1 = 1$ stabil fixpont, melynek vonzási tartománya a $\phi_0^1 \in (0, 1]$ intervallum. Ez ismételt konvergenciához vezet a rendszerben ezúttal viszont az alacsony technológia tűnik el, míg a rendszer egészen technológiai szint növekedést figyelhetünk meg.

Érdekes megfigyelni, hogy az $1/3 < r < 1$ és $1 < r < 3$ tartományokban a rendszernek három fixpontja van. Két fixpont jelzi a (5.15) által leírt homogén végállapotokat, melyek r ezen tartományában mindketten stabilak. A harmadik $\phi_{c_3}^1$ fixpontot az iterációs egyenletből származtathatjuk a következőképpen:

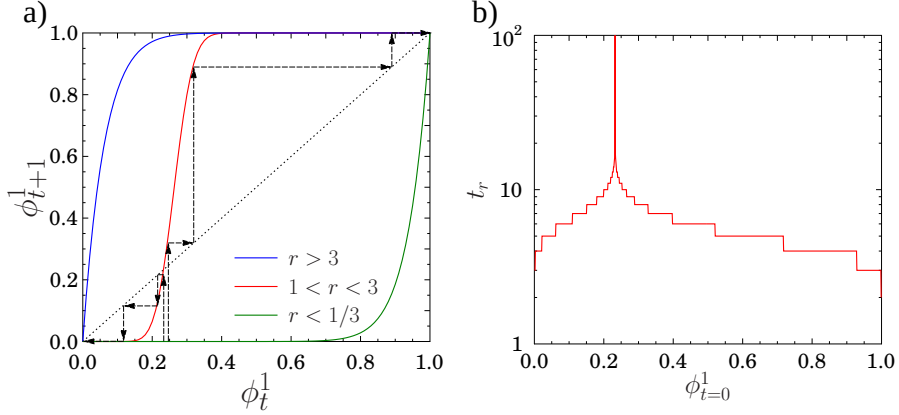
$$\phi_{t=0}^1 = \phi_{t=0}^1 + p_0^{0 \rightarrow 1}(1 - \phi_{t=0}^1) - p_0^{1 \rightarrow 0}\phi_{t=0}^1. \quad (5.16)$$

Az (5.16) egyenletet átrendezve

$$p_0^{0 \rightarrow 1}(1 - \phi_{t=0}^1) = p_0^{1 \rightarrow 0}\phi_{t=0}^1 \quad (5.17)$$

egyenletet kapjuk, s mivel $p_0^{0 \rightarrow 1} = 1 - p_0^{1 \rightarrow 0}$, következik, hogy

$$p_0^{0 \rightarrow 1}(1 - \phi_{t=0}^1) = (1 - p_0^{0 \rightarrow 1})\phi_{t=0}^1, \quad (5.18)$$



5.2. ábra. (a) A $\phi_{t+1}^1(\phi_t^1)$ függvény alakja konstans $n = 4$ szomszédszám esetén. Az ábrán három tipikus görbét mutatunk be az r költségfaktor különböző jellemző értékeihez. A piros görbe esetében $r = 1.4$ érték mellett iteráljuk (5.14)-t két különböző $\phi_0^1 = 0.23$ és $\phi_0^1 = 0.25$ kezdeti állapotból indulva. A szaggatott vonalakat követve látható, hogy a rendszer mindkét esetben homogén állapotba konvergál. Figyeljük meg, hogy minél közelebb indítjuk a rendszert az instabil fixponthoz, annál tovább tart, míg a rendszer eléri homogén végállapotát, azaz eljutunk valamelyik stabil fixpontba. (b) A t_r relaxációs idő $\phi_{t=0}^1$ kezdeti arány függvényében. A $\phi_{c3}^1 = 0.232$ instabil fixpontot elérve a t_r relaxációs idő jól láthatóan divergál.

melyből

$$p_0^{0 \rightarrow 1} = \phi_{t=0}^1. \quad (5.19)$$

Az (5.19) egyenlet alapján a technológiai szintek aránya akkor marad változatlan a teljes időfejlődés során, ha annak valószínűsége, hogy az egy egyed $\tau_0 = 0$ technológiai szintről $\tau_1 = 1$ magasabb technológiai szintre vált megegyezik a $\tau_1 = 1$ technológiai szint rendszerbeli arányával a kezdő-állapotban. Az (5.19) egyenlet numerikus megoldásának eredménye rendre $\phi_{c3}^1 = 0.768$ és $\phi_{c3}^1 = 0.232$ az $1/3 < r < 1$ és $1 < r < 3$ intervallumokra. Ez a fixpont instabil, azaz a ϕ_{c3}^1 által jelölt állapot csak akkor maradhat fenn a rendszerben, ha a kezdeti feltételek alapján $\phi_{t=0}^1 = \phi_{c3}^1$. Minden egyéb kiindulóállapotból a rendszer valamelyik stabil fixpontba konvergál, melyekben

csak egyetlen technológiai szint marad fenn (5.2 ábra).

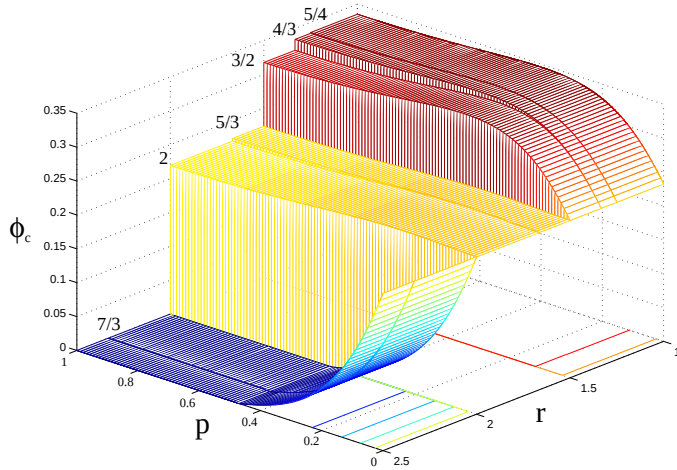
Az 5.2(a) ábrán az (5.14) dinamikai egyenlet iterálásával kapott görbék láthatók ϕ_t^1 függvényében, $r = 1.4$ költségfaktor mellett⁶ $n = 4$ konstans szomszédszámot feltételezve. A harmadik $\phi_{c_3}^1$ fixpont helye pontosan a $\phi_{t+1}^1(\phi_t^1)$ görbe és az ábrán feltüntetett $\phi_{t+1}^1 = \phi_t^1$ egyenes metszéspontja. Figyeljük meg, hogy a $\phi_{t=0}^1 < \phi_{c_3}^1$ kezdeti aránnyal, azaz a $\phi_{c_3}^1$ fixpont baloldaláról indított iterációk mindig a $\phi_{t \rightarrow \infty}^1 = 0$ végállapotba konvergálnak. Ebben az esetben a τ_1 technológia végleg eltűnik a rendszerből. Ugyanígy a fixpont jobboldaláról indított iterációk esetében, azaz ha a kezdeti koncentrációra igaz, hogy $\phi_{t=0}^1 > \phi_{c_3}^1$, a magasabb technológia válik dominánssá míg az alacsonyabb eltűnik, azaz $\phi_{t \rightarrow \infty}^1 = 1$. Ezek az eredmények jól mutatják, hogy a $\phi_{c_1}^1 = 0$ és $\phi_{c_2}^1 = 1$ fixpontok stabilak, vonzáskörzetük pedig rendre a $[0, \phi_{c_3}^1)$ és a $(\phi_{c_3}^1, 1]$ intervallum.

A fenti vizsgálatok tanulsága, hogy a két technológia arányát illetően bármely véletlen konfigurációból indítva a rendszert, az egy homogén végállapotba konvergál, ahol csak az egyik technológia él túl. Ugyanakkor a kezdeti arányok pontos értéke erősen kihat arra, hogy a rendszer mennyi idő alatt éri el a végállapotot. A 5.2(b) ábrán a t_r relaxációs időt ábrázoltuk a magasabb technológia $\phi_{t=0}^1$ induló arányának függvényeként. Jól látható, hogy a harmadik (azaz az instabil) fixponthoz közelítve t_r divergál ($t_r \rightarrow \infty$), ami azt jelenti, hogy ilyen kezdeti beállítások esetén a technológiák inhomogén jelenléte hosszan fennmaradhat.

A modell így jól leírja azt a természetes jelenséget, hogy különböző termékek esetén bizonyos piaci részesedés mellett a technológiák versengése sokkal kiélezettebb és hosszabban tartó. A technológiák kezdeti részarányát a gyártók például reklámtevékenységen keresztül befolyásolhatják (lásd 4 fejezet).

Érdekes eredményre juthatunk, ha megvizsgáljuk, hogyan befolyásolja a technológiák elterjedését ha az egyedeket szociális kapcsolatok komplex hálózata helyezzük. A négyzetrácstól bonyolultabb komplex hálózatokat a

⁶Természetesen ebben az esetben a konstans 4 foksám miatt tetszőlegesen más $1 < r < 3$ értékre is azonos eredményt kapnánk.



5.3. ábra. A rendszer $\phi_{c_3}^1$ fixpontja a p átkötési valószínűség függvényében az r költségfaktor $1 < r < 2.5$ tartományán. A hálózat fokszámanak heterogenitása azt eredményezi, hogy a rendszer mind érzékenyebbé válik a fejlettebb technológia által nyújtott előnyökre. A felületgörbén szerepeltetett számok azok az r értéken megfigyelt intervallumhatárok, melyek között $\phi_{c_3}^1$ fixpont konstans értékeit felveszi.

korábban már említett Watts-Strogatz módszer segítségével generálhatunk. Mester egyenleteinkben ezt a megváltozott topológiát a felhasznált ((3.6) egyenletben leírt) ρ fokszámeloszlás (5.11) egyenletben történő változtatásával írhatjuk le. Az átváltási valószínűség eszerint továbbra is

$$p_t^{0 \rightarrow 1} = \sum_n \rho_n \sum_{k=\lceil np_h \rceil}^n \binom{n}{k} (1 - \phi_{t=0}^0)^k (\phi_{t=0}^0)^{n-k}. \quad (5.20)$$

alakú, ρ_n azonban az eddigi konstans 4 értékről a Watts-Strogatz módszerrel előállított kisvilág hálózat fokszámeloszlása lesz.

Az 5.3 ábrán a $\phi_{c_3}^1$ instabil fixpont helyét ábrázoljuk a költségfaktor $1 < r < 2.5$ tartományában, a p átkötési valószínűséget változtatva a $[0, 1]$ intervallumon. Mivel az újradrótozáskor használt kiinduló hálózatunk kons-

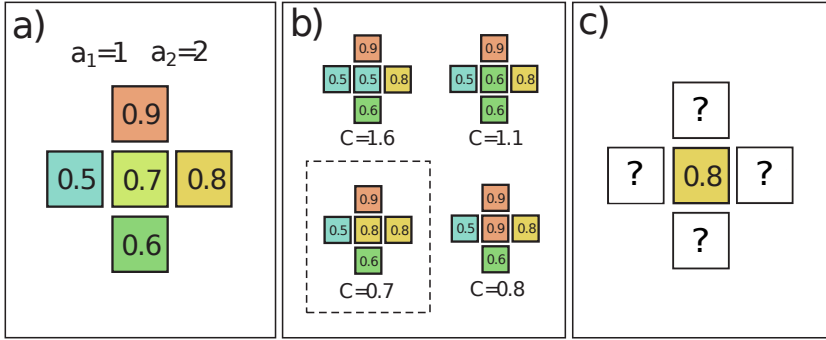
tans 4 foksámú hálózat volt, $p = 0$ épp ezt a hálózatot, míg $p = 1$ a teljesen véletlen gráfot jelenti. Figyeljük meg, hogy $p = 0$ esetén a fixpont pontos értéke változatlan marad, függetlenül az r értékétől. Ugyanakkor, ahogy növeljük a p átkötési valószínűséget, azaz mind szélesebb foksámeloszlásokból indulunk, két fontos változás is bekövetkezik: a $\phi_{c_3}^1$ fixpont folytonos függést mutat p értékétől, az r értékétől függő intervallumok pedig kisebb részintervallumokra hullanak szét, mind különböző $\phi_{c_3}^1$ fixpont értékekkel.

Ezzel az egyszerű mester egyenlet analízissel megmutattuk, hogy a szociális kapcsolatok topológiája milyen nagy hatással is lehet a technológiák elterjedésére a rendszerben. A topológia következtében jelentkező további változásokat figyelhetünk meg a későbbiekben, sejtautomata szimulációval végzett vizsgálataink eredményeként.

5.3. Sejtautomata szimulációk

Hogy az előzőekben bemutatott analitikus számításokat el lehessen végezni, komoly egyszerűsítő feltevésekkel kellett élnünk. A módszer nyilvánvaló előnye, hogy még egyszerűsítéseink ellenére is a rendszer legérdekesebb jellemzőit zárt analitikus formában származtathattuk. A kapott eredmények ugyanakkor minden esetben csak bizonyos feltevések mellett lehettek igazak, például a kölcsönhatás hatáskörének, a szociális kapcsolatok hálózati topológiájának egyszerűsítésével, a technológiai szintek számának csökkentésével, vagy a technológiai szint szerint klaszterizáló hatások figyelmen kívül hagyásával.

Ahhoz, hogy rendszerünk térbeli fejlődését teljes komplexitásában tudjuk vizsgálni, sejtautomata technikán alapuló számítógépes szimulációkat véghezvünk. Kezdetnek tekintsük egyedek egy $L \times L$ méretű négyzetrácsát melyben minden egyed a négy legközelebbi szomszédjával kommunikál. A rács szélein ezúttal is periodikus határfeltételt alkalmazunk, így minden egyednek pontosan 4 kölcsönható szomszédja van. A kezdeti állapotban az egyedekhez tartozó technológiai szint egy 0 és 1 közötti egyenletes eloszlás szerint



5.4. ábra. A sejtautomata frissítési szabályának illusztrációja. Az (a) ábrán a jelenlegi konfiguráció látható, azaz egy egyed 4 kölcsönható partnerrel. Az ábrán a négyzetekben szereplő számokkal jelöltük az egyedekhez tartozó τ technológiai szinteket. Az a_1 és a_2 a költségfaktorok. A (b) ábra a középén feltüntetett egyed 4 különböző választási lehetőségét mutatja be. Az egyed azt a lehetőséget választja ki, mely a szomszédok jelenlegi állapota mellett a legkisebb költséggel jár. A (c) ábra a másolás utáni állapotot mutatja. A középső egyed átvette a számára legkedvezőbb technológiai szintet. Mivel a többi egyed esetében nem ismerjük az összes szomszéd technológiai szintjét, azok aktuális értékét az ábrán nem tudjuk megadni. A négyzetek színe a technológiai szintet jelöli csakúgy, mint a korábbi 5.1 ábra esetében.

véletlenszerűen választott valós érték

$$p_0(\tau) = 1 \quad \text{és} \quad P_0(\tau) = \tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (5.21)$$

Szimulációink során párhuzamos frissítési módszert⁷ használtunk, azaz minden egyed minden időlépésben egyszerre próbálja meg minimalizálni költségeit, feltételezve, hogy szomszédjai a következő időlépésben is tartják eddigi technológiai szintjüket. Ez a párhuzamos dinamika, az egyedek költségminimalizációra alapuló „másolás-elutasítás” viselkedése mellett a rendszer komplex időfeljődésének egyik forrása.

Legyen az i egyed technológiai szintje t időpillanatban τ , míg szomszédaié rendre $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$. Sajtautomata szabályunk eredményeként a következő

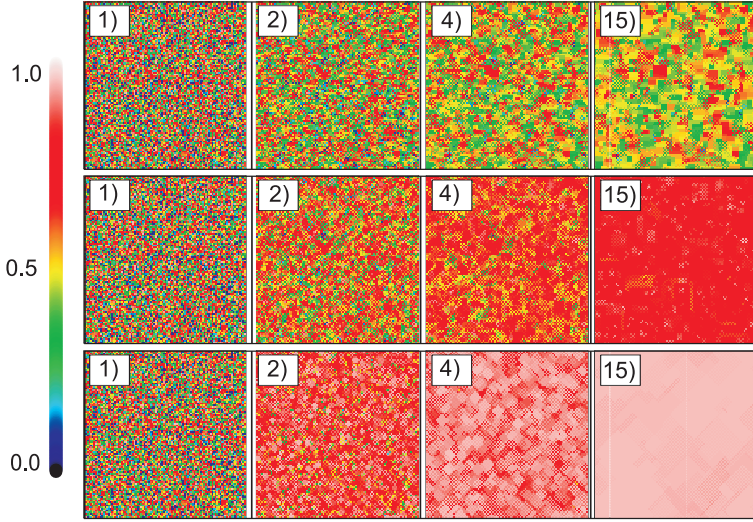
⁷lásd 3.3 fejezet

$t + 1$ időpillanatban az i egyed technológiai szintje

$$\tau_i^{t+1} = \tau_j \quad (5.22)$$

értékre vált, ahol j annak a szomszédnak a technológiai szintjét jelzi, melyet az (5.4) egyenletnek megfelelően a leginkább érdemes az i egyednek költségminimalizáció céljából lemásolni. Sejtautomatánk frissítési szabályát négyzetrács esetében az 5.4 ábrán szemléltetjük.

Figyeljük meg rendszerünk időfejlődésének pillanatfelvételeit az 5.5 ábrán $L = 100$ oldalhosszúságú négyzetrács esetén. Analitikus számításainkból ((5.8) és (5.9) egyenletek) tudjuk, hogy $n = 4$ szomszéd esetén az egyedek mindig az első, második, harmadik, vagy negyedik legnagyobb τ technológiai szinttel rendelkező kommunikációs partnert választják másolásra, amennyiben az r értéke rendre a $0 < r < 1/3$, $1/3 < r < 1$, $1 < r < 3$, $3 < r$ intervallumba esik. (Vegyük észre ismét, hogy a rendszer viselkedése az $r = 1$ esetre szimmetrikus!) Mivel a rendszer dinamikája alapján a lokális közösségek törekednek a közösségen belüli lehető legnagyobb kompatibilitásra, azaz igyekeznek mind azonos technológiai szintet birtokolni, az egyedek azonos τ értékekkel jellemzett klasztereket kezdenek kialakítani tetszőleges r érték mellett. Nagyon érdekes speciális beállítás az az eset, mikor $r = 1.0$ értéket feltételezünk a költségfaktorok hányadosaként. Ebben az esetben fejlettebbnek lenni a szomszédoknál semmivel nem jelent többet, mint az ellenkező eset (az alacsonyabb technológiai szint). Természetesen ettől függetlenül az azonos τ technológiai szintre való törekvés továbbra is érvényes, így ahogy az az 5.5 ábra felső sorában is látható, a rendszer végállapota nem lesz homogén, hanem a egy stabil technológiai szint szerinti klaszterezett struktúrába fagy be. A végállapotban szereplő klaszterek τ technológiai szintjei gyakorlatilag a teljes $[0, 1]$ intervallumból nem triviális eloszlás szerint kerülnek ki. Ez a klaszterizációs folyamat ebben az esetben azt eredményezi, hogy az alacsonyabb technológiák, még a sokkal fejlettebbek jelenléte ellenére is, fenn tudnak maradni a rendszerben, ahogy azt az 5.5 ábra felső sora is ki-válóan mutatja. $1 < r < 3$ esetén, amikor analitikus vizsgálataink alapján az egyedek a második legfejlettebb technológiát favorizálják, a sejtautomata



5.5. ábra. $L = 100$ oldalhosszúságú négyzetrács esetén futtatott sejtautomata szimulációk pillanatfelvételei $r = 1$ (felül), $r = 2$ (középen) és $r = 4$ (lenn) esetén. A színkód az egyedek aktuális technológiai szintjét jelöli, az ábrákon látható számok a pillanatfelvétel elkészítésének időlépését jelölik.

szimulációk eredményeként a rendszer egy majdnem teljesen homogén végállapotba kerül viszonylag magas átlagos technológiai szint mellett (lásd az 5.5 ábra középső sorát, ahol az $r = 2$ esetet ábrázoltuk). A szimulációk során először azonos τ technológiai szinttel rendelkező egyedekből álló klaszterek kezdenek növekedni, s végül az egész rendszer homogén állapotba kerül. Mivel lokálisan az egyedek mindig a második legnagyobb τ értéket választják másolásra, az időfejlődés végére mind a nagyon magas, mind a nagyon alacsony technológiai szintek eltűnnek a rendszerből. Az 5.5 ábrán a színkód alapján az is jól megfigyelhető, hogy a majdnem minden egyed által felvett τ technológiai szint alacsonyabb, mint a kezdeti állapotban szereplő legnagyobb $\tau_{max} = 1$. Számszerűen valahova 0.8 és 1 közé esik. Az (5.9) egyenlet alapján ahhoz, hogy elérjük a lehetséges legnagyobb technológiai szintet r

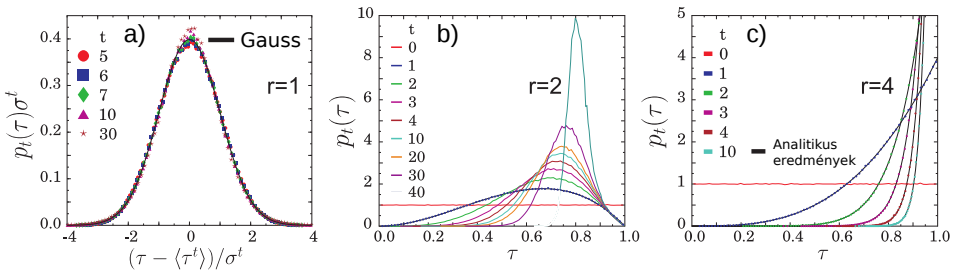
értéke át kell hogy lépje az $r = 3$ határt $n = 4$ konstans szomszédszám esetén. Ezt az esetet az 5.5 ábra alsó sora illusztrálja az $r = 4$ költségfaktor érték esetében. Az ábrán a majdnem teljesen fehér szín azt jelzi, hogy a lehető legmagasabb $\tau_{max} = 1$ technológiához igen közeli τ érték majdnem a teljes rendszerben elterjedt.

5.3.1. A technológiai szintek eloszlása – extrém statisztika

A négyzetrácsra ültetett sejtautomata időfejlődésének kvantitatív leírásához, meghatározzuk a τ technológiai szintek $p_t(\tau)$ eloszlását, illetve a $\langle\tau(t)\rangle$ átlagos technológiai szintet különböző t időpillanatokban

$$\langle\tau(t)\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau(t)_i, \quad (5.23)$$

ahol N a rendszer egyedeinek számát jelenti.



5.6. ábra. A technológiai szintek $p_t(\tau)$ valószínűségi eloszlása különböző időpillanatokban a költségfaktor három különböző értéke esetén. (a) $r = 1$ eset: az újraskálázott eloszlások által kirajzolt görbe. Az eloszlásokat a $\langle\tau(t)\rangle$ átlag és a σ^t szórás alapján skáláztuk újra. Az egymásra eső eloszlások által kirajzolt görbe kiválóan illeszthető a standard normális eloszlással. (b) $r = 2$ esetén, amikor minden egyed a második legnagyobb technológiai szintet választja saját lokális környezetéből, az eloszlás erősen csúcsos függvényformához vezet. (c) $r = 3$ esetén az egyedek mindig a lehető legnagyobb technológiai szintet választják, így az eloszlást extrém statisztikákkal kiválóan leírhatjuk. Az analitikusan számolt eloszlások görbéit folytonos vonallal jelöltük.

Az 5.6(a) ábra jól mutatja, hogy $r = 1$ esetén, amikor a magasabb technológiai szint semmilyen előnyt nem biztosít az egyedeknek, a $p_t(\tau)$ eloszlás gyorsan a normális eloszlásra jellemző függvényalakhoz konvergál. Ennek igazolásához, a $\langle \tau(t) \rangle$ átlagos technológiai szint és a σ^t , t időpillanatban kapott szórás szerint újraskálázva ábrázoltuk a különböző időpillanatokra jellemző eloszlásokat. Az 5.6(a) ábrán megfigyelhető jóminőségű adathalmazunknak köszönhetően igen pontos egyezést kapunk a

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \quad (5.24)$$

standard normális eloszlással. A normális eloszláshoz vezető konvergencia igen gyors. Teszt szimulációink alapján a rendszer 30 – 40 időlépés után teljesen elfelejti τ kezdeti eloszlását és $p_t(\tau)$ haranggörbe alakot vesz fel. Ez a forma természetesen azt jelenti, hogy a szélsőségesen alacsony, vagy magas technológiát birtokló egyedek aránya csökken, míg az átlagos technológiai szinthez közeli elterjednek az egész rendszerben. Vegyük ugyanakkor észre, hogy az időfejlődés során az átlagos technológiai szint nem változik lényegesen, azaz nem történik technológiai fejlődés $\langle \tau(t) \rangle \rightarrow 0.5$.

$r > 1$ költségfaktor esetén az egyedek lokálisan érdekeltek a magasabb technológiai szint lemásolásában, így a legnagyobb, vagy második legnagyobb τ értéket fogják választani költségeik minimalizálásához r pontos értékének függvényeként. Ezek a sejtautomata szabályában bekövetkező lokális változások a rendszert mégkomplexebb időfejlődésre kényszerítik, mely azonban extrém statisztikákkal [94] nyomon követhető. $1 < r < 3$ esetén az egyedek lokálisan mind a második legnagyobb elérhető technológiai szintet választják másolásra (a négyzetrács miatt lehetséges 4 szomszéd közül). Ennek következtében, kellően nagy rendszer esetén a technológiai szintek első időlépés utáni $p_t(\tau)$ eloszlása egy $k = 3$ rangú Φ_M^k extrém eloszlással írható le, melyben $M = 4$ és a mintavételt egyenletes eloszlásból indítjuk. Általánosságban a $\Phi_M^k(x)$ valószínűségi sűrűségfüggvény jelentése: a $p(x)$ valószínűségi sűrűségfüggvénnyel és $P(x)$ eloszlással jellemzett x valószínűségi változónak M darab realizációja közül kiválasztjuk a k . legnagyobb értéket.

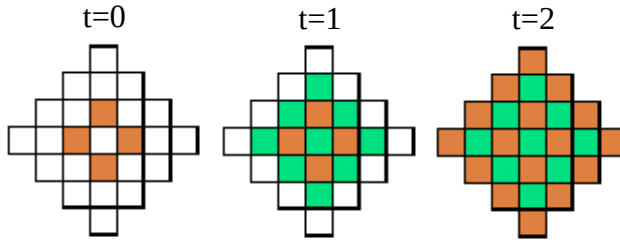
A $\Phi_M^k(x)$ sűrűségfüggvényt, ezeknek megfelelően a következőképpen adhatjuk meg:

$$\Phi_M^k(x) = \frac{M!}{(k-1)!(M-1)!} P(x)^{k-1} (1-P(x))^{M-k} p(x). \quad (5.25)$$

Az eredeti (5.21) egyenletes eloszlást behelyettesítve (5.25) egyenletbe, $M = 4$ és $k = 3$ paraméterértékek mellett, az 5.6(b) ábrán tökéletes egyezést figyelhetünk meg a fenti analitikus formula és a sejtautomata szimulációkkal kapott numerikus eredmények között. Sajnálatos módon későbbi iterációs lépések során hiába helyettesítjük be az előző lépésben kapott Φ_M^k eloszlásfüggvényt a (5.25) egyenletbe, p_t nem követi a numerikus szimulációink során kapott eredmények által meghatározott görbét. Ennek oka a lokális közösségekben szereplő szomszédok közötti átfedés, mely az első utáni időlépésekben módosítja a statisztikában szerepeltetett technológiai szinteket. Az iterációs lépések előrehaladtával p_t egyre keskenyebbé válik, majd a közel homogén végállapotban erősen csúcsos alakot vesz fel (lásd 5.6(b) ábra és 5.5 ábra középső sora). A fentiek alapján tehát az átlagos technológiai szint nő, illetve egy a $\tau_{max} = 1$ maximálisan elérhetőtl alacsonyabb határhoz konvergál. Fontos hangsúlyozni, hogy ennek ellenére a rendszer jelentős technológiai fejlődésen megy keresztül, melynek oka az alacsonyabb τ értékek eltűnése, illetve a magasabbak elterjedése.

Azokban a szélsőséges esetekben, amikor r értéke meghaladja a 3-at, a fejlettebb technológiák használata olyan sok előnnyel jár, hogy az egyedek számára minden időlépésben megéri környezetükből a legnagyobb elérhető technológiai szintet átvenni. Ennek következtében $p_t(\tau)$ extrém statisztikákon keresztül igen gyorsan élesen csúcsos formát vesz fel, melyen a csúcs helye $\tau_{max} = 1$ (5.6(c) ábra).

Érdekes megfigyelni, hogy az előző $1 < r < 3$ esettel ellentétben az $r > 3$ tartományban a p_t eloszlást minden t időpillanatban le tudjuk írni a Φ_M^k (5.25) extrém statisztikával $k = M$ választás mellett figyelembe véve, hogy az idővel M értékét növelnünk kell. M időfüggését egy rekurzív formulával



5.7. ábra. A négyzetrácson elhelyezett egyedek mindenyikére az első időlépésben pontosan 4 szomszéd van hatással. Minden további iterációban azonban egy kapcsolatnyival távolabbi szomszédok hatása is megjelenik. Így lesz hatással az ábrán középen szereplő egyedre az (5.26) egyenlet alapján $t = 0$ időpillanatban 4 (narancssárga), $t = 1$ időpillanatban 9 (zöld), míg $t = 2$ esetén 16 (narancssárga) másik egyed.

adhatjuk meg:

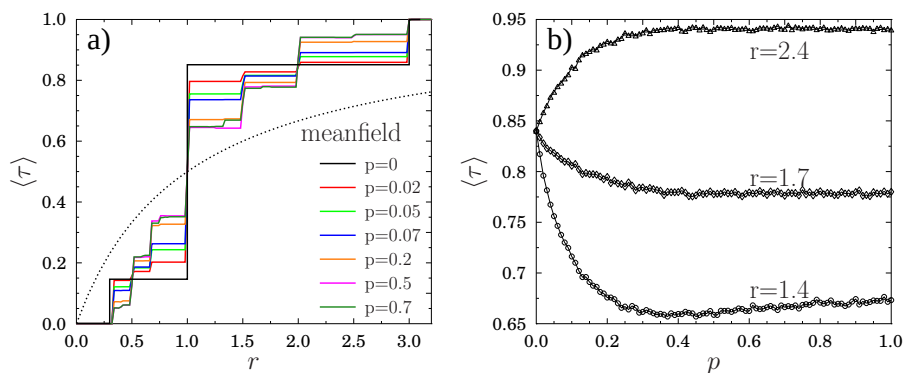
$$M_{t+1} = M_1 + 5 + 2(t - 1), \quad \text{ahol} \quad M_1 = 4, \quad (5.26)$$

mely megfelelően leírja a terjedési folyamatot a rendszerben. Az (5.26) egyenlet megértéséhez figyeljük meg az 5.7 ábrát. Az ábrán az időfejlődés első három lépésében jelöltük azokat az egyedeket, melyek négyzetrácson hatással vannak a középen látható egyed döntésére. Ezek darabszámát adja meg M_t .

Az 5.6(c) ábrán a folytonos vonallal ábrázolt analitikus görbe kiváló egyezést mutat a szimulációk eredményeivel. Ne feledjük, hogy az $r = 1$ értékre értelmezett szimmetria következtében ugyanezek igazak $r < 1/3$ tartományon is Φ_M^1 eloszlásra, ahol azonban a lehetséges legkisebb értékel (azaz $k = 1$) választjuk ki M_t lehetséges érték közül, ahol M_t ismét (5.26) alapján számolható.

5.4. Egyedek komplex hálózatokon

Az újonnan a piacra bevezetett technológiák sikere, vagy bukása az előzőek mellett nagyban múlhat a technológia felhasználóinak szociális hálózatán is. Különösképpen igaz ez az úgynevezett „networking” technológiákra, melyeknél az adott technológia használati értéke nagymértékben attól függ, hogy azt, a felhasználó hány társával együtt tudja használni, azaz a környezetében hányan rendelkeznek azonos technológiával. A vizsgálataink tárgyát képező telekommunikációs technológiák az ilyen esetek iskolapéldái [14, 75].



5.8. ábra. (a) A rendszer $\langle \tau \rangle$ átlagos technológiai szintje r függvényeként ábrázolva hosszú időfejlődés után, különböző p hálózati átkötési valószínűségekre. (b) $\langle \tau \rangle$ a p átkötési valószínűség függvényeként ábrázolva három konkrét r érték esetén. A hosszútávú kapcsolatok jelenléte mind növelni, mind csökkenteni képes az átlagos technológiai szintet. A viselkedés jellegét az r költségfaktor határozza meg.

Hogy kvantitatív szempontból is jobban megérthessük ezt a jelenséget modellünkben, a korábbiakhoz hasonló sejtautomata szimulációkat végeztünk, egyedeinket azonban ezúttal a már többször említett Watts-Strogatz módszerrel előállított komplex topológián helyeztük el, az átkötési valószínűséget 0 és 1 között változtatva (lásd 5.1.3 fejezet). A modellben használt komplex topológia két új tulajdonságot hoz felszínre: (i) ahogy a p átkötési valószínűséget növeljük, mind több és több, egymástól távoli egyedeket

összekötő, hosszútávú kapcsolat jelenik meg, melyek csökkentik a hálózat átmérőjét; (ii) A kapcsolatok számát leíró valószínűségi eloszlás azaz az egyedek fokszámeloszlása kiszélesedik. A lehetséges szomszédszám így a korábbi konstans érték helyett egy hálózaton belül több 0-tól nagyobb értéket is felvehet egyedtől függően (mivel rendszerünket minden esetben összefüggő hálózaton értelmezzük, a szomszédszám soha nem lehet 0, leszámítva az egyetlen egyedből álló extrém esetet). Az 5.2.2 fejezet egyik fő eredménye volt az a megállapítás, hogy a fokszámk változatossága érzékenyebbé teszi a rendszert a magasabb technológiai szint által nyújtott előnyökre, joggal várhatjuk tehát, hogy sejtautomata szimulációink során újabb érdekes részletekre figyelhetünk fel.

Az analitikus számítások során szükséges megszorításokon túlhaladva különböző topológiákon végeztünk sejtautomata szimulációkat. Ezek során az időfejlődés végén elért homogén, befagyott állapotban a rendszer által felvett $\langle \tau \rangle$ átlagos technológiai szintet vizsgáltuk. A p újrakötési valószínűség változtatásával különböző topológiákon kapott eredményeket az r költségfaktor függvényében ábráztuk az 5.8(a) ábrán. Figyeljük meg, hogy a $\langle \tau \rangle(r)$ átlagos technológiai szint r monoton növekvő függvénye függetlenül a p átkötési valószínűség értékétől. Az ábrázolt görbék jól elkülöníthető lépcsőkből állnak, melyek mérete és száma érzékeny függést mutat a felhasznált hálózati topológiára. A lépcsők az (5.8) egyenlet közvetlen következményei. Pozíciójuk pontosan egybeesik a különböző fokszámk esetén kiszámolt intervallumhatárokkal: $n = 4$ szomszéddal rendelkező egyedek esetén összesen 4 intervallumot kapunk: $r < 1/3$, $1/3 < r < 1$, $1 < r < 3$ és $r > 3$ (lásd (5.8) egyenlet). Ezek összesen három lépcsőt eredményeznek.

A p átkötési valószínűség növelésével a $\rho(n)$ fokszámeloszlás egyre szélesebbé válik, a 4-től különböző fokszámk mind nagyobb mértékben történő jelenlétét eredményezve. A magasabb fokszámk egyúttal a lépcsők számának megnövekedését is magukkal vonják, hiszen (5.8) alapján minden különböző fokszámkhoz más (a fokszámk függvényében növekvő méretű) intervallumhalmaz tartozik. A $p = 0.05$ átkötési valószínűséggel módosított

négyzetetrácsról készült 3.6(b) ábrán látható, hogy ebben az esetben a hálózatban előforduló foksámok $n = 2, 3, 4, 5, 6$. Az (5.8) és (5.9) egyenletek alapján tetszőleges n esetén tetszőleges r költségfaktorhoz tartozó intervallumhatárok kiszámolhatók, melyből jelenlegi példánk esetében az egész hálózatra kapott intervallumhatárok $1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 1, 3/2, 2, 3, 4, 5$. Összehasonlításképpen az 5.8(a) ábrán bejelöltük az átlagtér közelítéssel kapott (5.6) eredményt is, ahol minden egyed az összes többivel kommunikációs kapcsolatban van.

A fenti eredmények egyik legfontosabb mondanivalója, hogy az egyedek foksámának változatossága érzékenyebbé teszi szociális-gazdasági rendszerünket az olyan részletekre, mint például az r költségfaktor pontos értéke.

Ez a kvalitatív tulajdonság skálafüggetlen hálózatok felhasználásakor is igaz marad, ugyanakkor a véletlen hálózatok és a skálafüggetlen hálózat közötti topologikus különbség ezúttal sem hoz jelentős változást a rendszer viselkedésébe. A további megállapítások mind az átkötéssel kapott kis-világ hálózatok, mind a klasszikus skálafüggetlen hálózatok esetében igazak.

A 5.8(a) ábrán jól látható, hogy a rendszer összekötöttségének növelésével a hosszútávú kapcsolatok jelenléte csökkentheti, de akár növelheti is a rendszer időfejlődésének végére elért átlagos technológiai szintet az r költségfaktor értékétől függően. Kellően nagy r költségfaktor esetén a hosszútávú kapcsolatok megkönnyítik a technológia elterjedését, ugyanakkor alacsonyabb r esetén ellenkező hatást eredményeznek, azaz a hosszútávú kapcsolatokkal körbevett alacsonyabb technológia gátolja a rendszerben a technológiai fejlődést. A 5.8(b) ábra némi kvantitatív rálátást enged a jelenségre. Az ábrán a $\langle \tau \rangle$ átlagos technológiai szintet a p átkötési valószínűség függvényében ábrázoltuk különböző r értékek esetén. $p = 0$ érték esetén minden görbe azonos pontból indul, hiszen egyszerű négyzetetrácson mindig a második legnagyobb technológia kerül kiválasztásra, amennyiben r értéke az $1 < r < 3$ intervallumba esik. p növelésével azonban a görbék r -től függő aszimptotikus értékekhez tartanak, melyek lehetnek alacsonyabbak, de magasabbak is, mint a $p = 0$ esetében kapott érték.

5.5. Az innovációterjedés tulajdonságai

Fenti vizsgálataink során a technológiai szinteket egyenletes eloszlás szerint választottuk ki minden egyed esetében. Fontos kérdés ugyanakkor, hogy milyen feltételeknek kell ahhoz teljesülnie, hogy egy kezdetben homogén rendszerben egy új technológia el tudjon terjedni [95]. A döntési mechanizmust ismerve könnyen belátható, hogy általános esetben egy homogén rendszerben egyedülként magasabb technológiai szinttel rendelkező egyed hamar visszavált az alacsonyabb technológiára. (Hacsak a költségfaktor értéke nem esik épp a korábbiak szerint meghatározott legfelső lehetséges intervallumba (5.4).) Ugyanakkor az ilyen magasabb technológiai szintű innovatív egyedek ϕ arányának növelésével terjedés indul a rendszerben, amint ϕ elér egy kritikus értéket. Kiváló példa ez a terjedési jelenségeknél megfigyelhető *kritikus tömeg* hatásra, mely különösen gyakori a telekommunikációs technológiákhoz hasonló esetekben, ahol a technológia gyakorlati haszna nagyban függ attól, hogy az adott pillanatban a rendszer szereplőinek mekkora aránya használja az adott technológiát [28].

Átlagtér közelítés esetén a kritikus tömeg egyszerűen számolható analitikusan. Tegyük fel, hogy rendszerünk homogén állapotban van, azaz a rendszert alkotó N egyed mindegyikének technológiai szintje τ_1 . Az egyedek egy ϕ része ekkor úgy dönt, hogy jelenlegi eszközét magasabb technológiai szintűre cseréli, mely technológiai szint pontos értéke legyen $\tau_2 > \tau_1$. Telekommunikációs technológiák konkrét esetében feltételezhetjük például, hogy τ_1 jelenti az SMS-, míg τ_2 az MMS-képes, azaz fejlettebb mobiltelefonokat. Mivel esetünkben minden egyed az összes többivel kapcsolatban áll, az egyedek C teljes költsége mind a τ_1 , mind a τ_2 technológiájú egyedek esetén könnyen számítható, rendre:

$$C(\tau_2) = a_2(\tau_2 - \tau_1)\phi N, \quad \text{és} \quad C(\tau_1) = a_1(\tau_2 - \tau_1)(1 - \phi)N, \quad (5.27)$$

A τ_1 technológiai szinttel rendelkező egyedek – ahogy az eddigiekben is – akkor térnek át a τ_2 technológiára, ha az költségeik csökkenésével jár, azaz

$C(\tau_2) < C(\tau_1)$. E feltétel alapján az innovatív egyedek ϕ_c kritikus aránya,

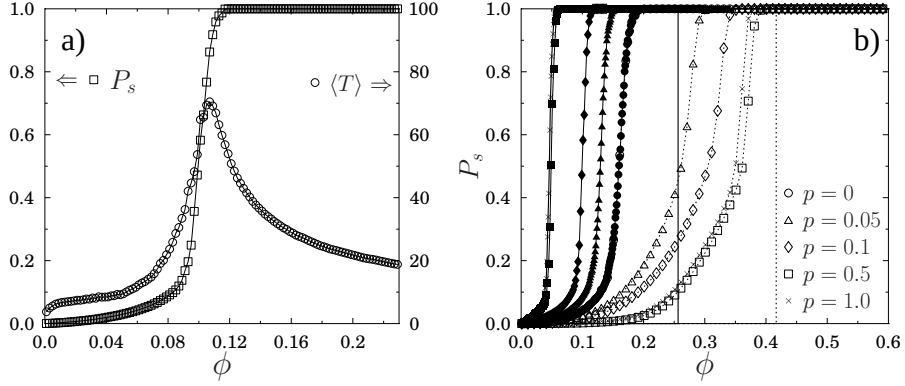
$$\phi_c = \frac{1}{1+r}. \quad (5.28)$$

formában adható meg.

Érdemes megfigyelni, hogy ϕ_c értéke nem függ a technológiai szintek közötti $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ különbségtől, csak a fejlettebb technológia által nyújtott előnyök r relatív mennyiségétől. A számunkra fontos $r \geq 1$ paraméterértéktartományban a kritikus arány értéke az (5.28) egyenlet alapján a $0 \leq \phi_c \leq 1/2$ intervallumba esik. A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a rendszernek két különböző fázisa van: (i) Amennyiben az innovatív egyedek $\phi \leq \phi_c$ aránya kicsi, a fejlettebb technológia gyorsan kihál és a rendszer homogén állapotba kerül, melyben minden egyed τ_1 technológiai szinttel rendelkezik. (ii) másrészt $\phi > \phi_c$ esetén a magasabb τ_2 technológia elterjed a rendszerben, mely így szintén homogén állapotba kerül viszont ezúttal minden egyed a magasabb, τ_2 technológiával fog rendelkezni. Mobiltelefonos példánknál maradv ϕ_c kritikus arány alatt az embereknek jobban megéri megszabadulni fejlett MMS-képes telefonjuktól, hiszen ez a képesség semmilyen előnyt nem biztosít számukra. Mindemellett természetesen, a kritikus arányt átlépve az új technológia kiválthatja a régebbit, s az egész közösségben elterjedhet.

Átlagtér közelítésben a rendszer nem rendelkezik szigorúan vett időfejlődéssel, hiszen egyedei az első lépésben mind azonos döntést hoznak és így végállapotba kerül már az első időlépés után. Ugyanakkor, ahogy azt már korábban is láttuk, ha az egyedek kölcsönhatásának távolságát a legközelebbi szomszédokra korlátozzuk, komplex időfejlődést figyelhetünk meg. Ismét számítógépes szimulációkat végeztünk, melyek során N elemből álló komplex topológiájú rendszerből indultunk ki, melyben minden egyed induló technológiai szintje τ_1 volt. A szimulációs folyamat inicializálásakor az egyedek véletlenszerűen kiválasztott ϕ részét magasabb, τ_2 technológiai szintűre állítottuk, ahol $\tau_2 > \tau_1$. Ezután egészen a végállapotig nyomon követtük a rendszer időfejlődését ezúttal soros frissítési módszert alkalmazva⁸.

⁸Döntésünk indoka, hogy mivel a rendszerben csak két különböző technológiai szint sze-



5.9. ábra. (a) A P_s terjedési valószínűség az innovatív egyedek ϕ arányának függvényeként ábrázolva, valamint a $\langle T \rangle$ relaxációs idő $p = 0.05$ és $r = 2.9$ paraméterek mellett. (b) P_s terjedési valószínűség a ϕ arány függvényeként különböző topológiák esetén két különböző r költségfaktorra ($r = 2.9$ kitöltött szimbólumok, $r = 1.4$ üres szimbólumok). A függőleges vonalak az átlagtér közelítésben kapott ϕ_c értékeket jelölik $r = 1.4$ (pontosított vonal) és $r = 2.9$ (folytonos vonal) esetén. A szimulációkhoz használt rendszer méret $L = 101$.

Átlagtér közelítés esetén ϕ értékét növelve az innovatív egyedek kritikus arányának elérésekor a rendszer két fázisa között éles átmenetet figyelhetünk meg. Ezzel szemben, amikor az egyedek, csak a szociális hálózaton legközelebbi szomszédakkal léphetnek kapcsolatba, a magasabb technológia elterjedése bármely ϕ arány esetében előfordulhat P_s valószínűséggel. Numerikus módszerekkel meghatároztuk a P_s valószínűséget ϕ függvényeként, egyszerűen nagy mennyiségű futtatást véve, megszámlálva, hogy hány esetben fordult elő, hogy a rendszerben a magasabb technológia vált dominánssá.

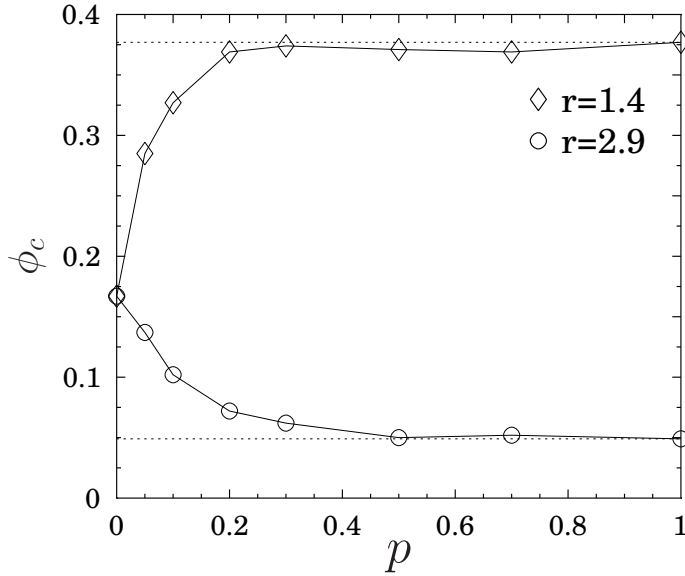
A 5.9(a) ábra a P_s terjedési valószínűséget ábrázolja ϕ függvényeként egy $p = 0.05$ átkötési valószínűséggel jellemzett kisvilág hálózat esetében. Látható, hogy a P_s terjedési valószínűség a ϕ kezdeti arány monoton növekvő

repel, a négyzetrács topológia és a párhuzamos frissítés eredményeképp túlzottan könnyen jelentkezne egyfajta „sakktábla” effektus, mely során a két szolgáltatóhoz tartozó egyedek soronként és oszloponként is egymást váltogatva helyezkednének el. A soros frissítés során használt véletlenszerű frissítési sorrend (lásd 3.3 fejezet) azonban hatásosan kiküszöböli ezt a problémát.

függvénye két jól elkülöníthető tartománnyal: Létezik az innovatív egyedek ϕ_c kritikus aránya, melyet át kell lépni, hogy a technológia terjedése 1 valószínűséggel bekövetkezhesen. A kritikus pont alatt, azaz $\phi < \phi_c$ esetén az új innováció nagy valószínűséggel kihal, s a rendszerben nem tapasztalhatunk technológiai fejlődést. A kritikus pont felett, azaz $\phi > \phi_c$ esetén ugyanakkor az új innováció a teljes rendszerben szétterjed, minden egyed átveszi a magasabb technológiát és a teljes rendszer magas technológiai állapotba kerül. Numerikus eredményeink alapján megfigyelhető, hogy a ϕ_c kritikus arány helye jó közelítéssel egybeesik a $P_s(\phi)$ elterjedési valószínűséget leíró függvény inflexiós pontjával.

Az 5.9(b) ábrán megfigyelhető, hogy az átkötések eredményeként megjelenő hosszútávú kapcsolatok jelentős hatást gyakorolnak a terjedési folyamatra: Amennyiben a technológia megfelelő mértékű előnyt biztosít (azaz r értéke kellően nagy; az ábrán $r = 2.9$), a hosszútávú kapcsolatok elősegítik a magasabb technológia elterjedését, így a ϕ_c kritikus arány a p átkötési valószínűség csökkenő függvénye lesz. Ellenben ha a biztosított előnyök nem elegendő mértékűek (túl alacsony, de 1-nél még mindig magasabb r érték; az ábrán $r = 1.4$), a topológia ellenkező hatást fejt ki, mégpedig úgy, hogy az alacsony technológiájú egyedeket a hosszútávú kapcsolatokon keresztül visszatartja a magasabb technológiára váltástól. Ennek következtében ez utóbbi esetben az innovatív egyedek nagyobb aránya szükséges ahhoz, hogy terjedés történhessen, így ϕ_c kritikus arány a p átkötési valószínűség növekedő függvénye lesz.

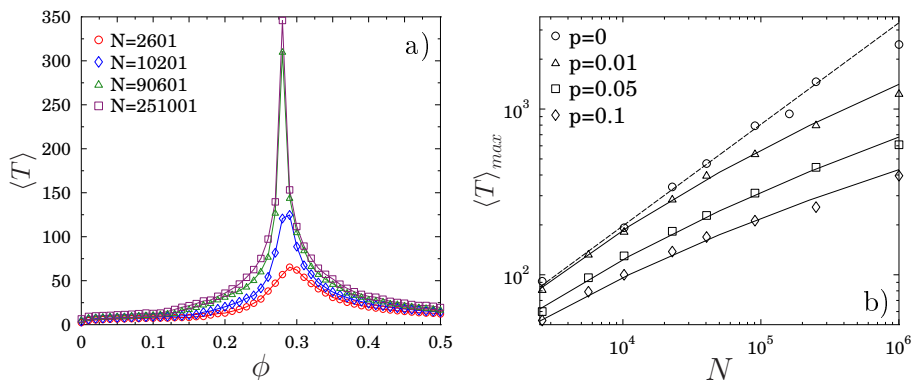
A ϕ_c kritikus arány függését p átkötési valószínűségtől az 5.10 ábra mutatja be két különböző, az 5.9(b) ábrán is használt r érték esetén. Figyeljük meg, hogy kellően nagy p -re $\phi_c(p)$ mindkét esetben egy-egy aszimptotikus értékhez tart. Érdekes megfigyelni, hogy jelentését tekintve ez teljesen összecseng az 5.4 fejezetben korábban leírtakkal, miszerint az átkötési valószínűség növelésével rendszerünk érekenyebbé válik más paraméterek változásaira. Tartsuk ugyanakkor szem előtt, hogy abban az esetben az átkötési valószínűség és az átlagosan elért technológiai szint kapcsolatát vizsgáltuk folytonos



5.10. ábra. Az innovatív egyedek terjedéséhez minimálisan szükséges ϕ_c aránya a p újrakötési valószínűség függvényében az r költségfaktor két különböző értékére, melyeket a 5.9(b) is használtunk. A két görbe természetesen közös kezdőpontból indul, hiszen az $1 < r < 3$ tartományban tetszőleges költségfaktor esetén azonos döntést hoznak az egyedek

technológiai szint-tartományból egyenletes eloszlással generált kezdőállapotból kiindulva, míg jelen esetben összesen két technológia versengésének átlagos eredményéről beszélünk a p átkötési valószínűség mellett.

A társadalmi-gazdasági rendszer érzékenységet az új innováció megjelenésével előálló állapotváltozásra legkönnyebben az átlagos relaxációs idővel írhatjuk le, azaz az új innováció után a homogén állapotba jutáshoz szükséges iterációs lépések átlagos számával. Az 5.9(a) ábrán a $\langle T \rangle$ relaxációs időt ϕ függvényeként együtt ábrázoltuk a kisvilág topológián vett P_s terjedési valószínűséggel. Figyeljük meg, hogy az innovatív egyedek kritikus arányának elérésekor a rendszer relaxációs idejét leíró görbének meredek emelkedés után maximuma van. Ez a viselkedés azt jelenti, hogy a kritikus arány környékén a másolás-elutasítás folyamat lelassul, azaz, jóval tovább



5.11. ábra. (a) A $\langle T \rangle$ relaxációs idő az innovatív egyedek ϕ függvényeként ábrázolva különböző rendszerméretek esetén $p = 0.05$ újrakötési valószínűség mellett. (b) Az átlagos relaxációs idő $\langle T \rangle_{max}$ maximuma az N rendszerméret függvényeként különböző p átkötési valószínűségértékek mellett

tart, míg a rendszer homogén végállapotba kerül. Fontos megjegyeznünk, hogy a maximum pozíciója pontosan egybeesik a ϕ_c kritikus ponttal. Ez a jelenség rendszerünkben megfelel a folytonos fázisátalakulásoknál megfigyelt kritikus lassulás jelenségének. Az 5.11(a) ábrán jól látható, hogy az N rendszerméret növelésével a ϕ arány függvényében ábrázolt $\langle T \rangle$ relaxációs idő maximuma egyre látványosabban jelenik meg. Hogy a $\langle T \rangle_{max}$ érték méretfüggését meghatározzuk, különböző N rendszerméretek mellett végeztünk szimulációkat többféle p átkötési valószínűség mellett. Az 5.11(b) ábra jól mutatja, hogy a $\langle T \rangle_{max}$ relaxációs időmaximumnak közel azonos a méretfüggése, mint a hálózatot jellemző $\bar{l}(N)$ egyedek közötti átlagos legrövidebb útnak (3.4 fejezet), azaz $p = 0$ értékhez $\langle T \rangle_{max} \sim N^{1/d}$ eredményt kapjuk, míg az átkötési valószínűség véges értékei esetén logaritmikus függést figyelhetünk meg ($d = 2$ az egyszerű négyzettrács dimenziószáma). Ez a viselkedés közvetlenül azt jelenti, hogy a kritikus ponttól távol a lokális döntések gyorsan az egyik technológia eltűnéséhez vezetnek, míg ϕ_c közvetlen környezetében a kollektív hatások dominálnak.

5.6. Több szolgáltató jelenlétének hatása a terjedésre

Az eddigiekben feltételeztük, hogy rendszerünkben a technológiák szolgáltatóktól függetlenül jelennek meg és terjednek el. A valós világban ezzel szemben az adott technológia fejlettségén kívül más tulajdonságok is szerephez jutnak, amikor arról döntünk, lecseréljük-e eddig használt termékünket. Ezek közül talán a legkézenfekvőbb példa – különösen telekommunikációs eszközök esetén – a szolgáltatók jelenléte. Vegyünk egy olyan szituációt, amikor ismerőseink nagy része alacsonyabb technológiát használ, de azt ugyanaz a szolgáltató biztosítja, mint az általunk használtat. Eközben a többi ismerősünk magasabb technológiára váltott, viszont ehhez a szolgáltatójukat is le kellett cserélniük. Ilyenkor vetődik fel a kérdés, megéri-e nekünk is váltani a magasabb technológiára, ha ez azzal jár, hogy így ismerőseink nagy részétől különböző, azaz az övékével kevéssé kompatibilis szolgáltatóhoz kell, hogy kerüljünk?

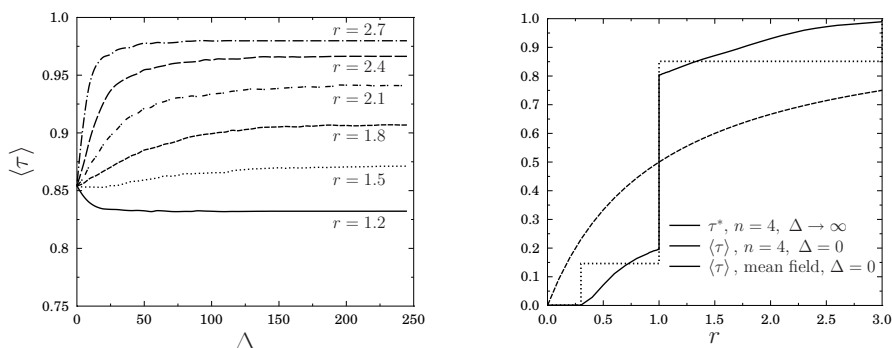
A következőkben megmutatjuk, hogy a szolgáltatók jelenléte jelentős mértékben megváltoztatja a rendszer viselkedését, noha a dinamika elsődleges irányítója továbbra is a költségminimalizáció marad. Az egyszerűség kedvéért, a következőkben minden esetben egyszerű négyzetrács topológiát feltételezünk számítógépes szimulációink során.

A szolgáltatók jelenlétét matematikai eszközökkel a költségfüggvény módosításával tudjuk figyelembe venni. Feltételezzük, hogy a piacon összesen maximálisan két szolgáltató verseng egymással. Azt, hogy melyik egyed melyik szolgáltatótól származó technológiát használ az $S \in \{-1, 1\}$ változóval adjuk meg mindegyikük esetében. A különböző szolgáltatók közötti inkompatibilitás leírásához az 5.1.1 fejezetben megadott (5.1) költségfüggvényünket a következők szerint alakítjuk át:

$$C(i \rightarrow j) = a|\tau_i - \tau_j| + \frac{1}{2}\Delta(1 - S_i S_j), \quad (5.29)$$

ahol a második tag értéke azonos szolgáltatók között 0, míg különböző szol-

gáltatók esetében Δ . A különböző szolgáltatók közötti inkompatibilitás miatt fellépő extra költségek Δ mértékét konstansként adjuk meg, s a későbbiekben vizsgálni fogjuk, hogy milyen hatással van a rendszerre, ha ennek értékét változtatjuk.



5.12. ábra. (a) a rendszerben aszimptotikusan elért $\langle \tau \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \tau(t) \rangle$ átlagos technológiai szint Δ függvényeként. (b) τ^* analitikusan kapott végállapoti technológiai szint az r költségfaktor függvényeként ábrázolva. Az ábrán feltüntetettük a átlagtér közelítéssel kapott, és a lokális esetekből számolt analitikus eredmények által meghatározott görbéket is (5.5, 5.8 és 5.9 egyenletek) $n = 4$ esetén $\Delta = 0$ értéket feltételezve.

Tételezzük fel, hogy rendszerünkben n_1 egyed az első szolgáltatóhoz tartozó $S = +1$ technológiát használja, míg a maradék n_2 egyed esetén $S = -1$, ahol $N = n_1 + n_2$. Az egyedek technológiai szintje ugyanakkor továbbra is szolgáltatótól függetlenül egyenletes eloszlás szerint alakul 0 és 1 között.

$N \rightarrow \infty$ határesetben, átlagtér közelítésben az 5.1.1 fejezetben már ismertett gondolatmenet eredményeként a rendszer minden egyede egyetlen időlépés alatt minimalizálja a rá vonatkozó költségfüggvényt; a rendszer egésze a kiinduló technológiai szinteloszlás m mediánját veszi fel értékül, szolgáltatók közül pedig azt választják, amelyik az induló állapotban nagyobb arányban van jelen a rendszerben. Az előzőtől összetettebb eredményre jutunk, ha feltételezzük, hogy az $S = -1$ első szolgáltatóhoz tartozó n_1 egyed mindegyike azonos τ_1 technológiai szinttel rendelkezik, míg az $S = +1$ ér-

téssel jelölt szolgáltatóhoz tartozó n_2 egyed mindegyikének τ_2 technológiai szintű terméke van, ahol $\tau_1 > \tau_2$.

Analitikusan belátható, hogy még ha a magasabb τ_1 technológia használata előnnyel is jár ($r > 1$), az egyedek $C(\tau, \Delta)$ minimalizálásához az alacsonyabb τ_2 technológiát választják, amennyiben Δ meghaladja a

$$\frac{n_2 a_2 - n_1 a_1}{n_1 - n_2} (\tau_1 - \tau_2) < \Delta. \quad (5.30)$$

küszöbszintet. Az (5.30) kifejezésben természetesen $n_1 \neq n_2$. $n_1 = n_2$ esetén az egyedek választása nem függ Δ értékétől. Kisméretű lokális közösségekben gyakran előfordul, hogy az egyes szolgáltatókhoz különböző mennyiségű felhasználó tartozik. A fenti eredmények fényében megállapítható, hogy ezekben az esetekben a szolgáltatók közötti inkompatibilitás Δ mértéke jelentős hatással van az egyedek optimális választására. Ez a megfigyelés hasznos lehet a marketing stratégia tervezésekor abban az esetben például, ha egy termék gyártója azt egy kizárólagos forgalmazón keresztül kívánja piacra dobni.

Numerikus szimulációinkban egyenletes eloszlású technológiai szintekből indultunk ki, s feltételeztük, hogy a rendszerben szerepeltetett szolgáltatóink rendre $p = 0.5$ és $q = 0.5$ arányban vannak jelen. Számításaink rávilágítottak, hogy a rendszer által felvett $\langle \tau(t) \rangle$ átlagos technológiai szint ismét egy aszimptotikus értékhez tart, mely azonban ez esetben nemcsak az r , de Δ értékétől is függ. Az 5.12(a) ábra $\langle \tau(t) \rangle$ hosszú idő után felvett értékére mutat néhány reprezentatív példát. Látható, hogy míg $\Delta = 0$ esetén az összes, különböző r értékek mellett vett görbe azonos pontból indul, Δ növelésével azonban elválnak egymástól és r értékétől függően különböző irányban haladnak tovább. (Jegyezzük meg ugyanakkor, hogy az ábrán látható görbék mindegyikének esetén r értéke az 5.8 egyenletben megadott azonos intervallumba esik. A $\Delta = 0$ érték mellett felvett kiinduló értékek tehát intervallumokon belül azonosak, de különböző intervallumokra más és más helyen vannak.)

Az 5.12(b) ábrán az (5.5) egyenletből átlagtér közelítés esetén kapott τ^* aszimptotikus technológiai szintértéket hasonlítjuk össze a négyzettrácson

$\Delta = 0$ és $\Delta \rightarrow \infty$ esetén végzett szimulációink során kapott $\tau^*(r)$ r -től függő $\langle \tau \rangle$ átlagos technológiai szintre vett határértékekkel. Érdekes megfigyelni, hogy $r > 1$ esetén amellet, hogy általánosan elmondható, hogy a szolgáltatók jelenléte érzékenyebbé teszi a rendszert a fejlettebb technológia által nyújtott előnyökre (r), az esetek többségében ez az érzékenység erőteljesebb technológiai fejlődésben testesül meg.

6. fejezet

Összefoglalás

A nagyszámú kölcsönható egyedből álló rendszerek viselkedésének megértésére számos tudományterületen végeznek intenzív kutatásokat. A természetben megjelenő bonyolult biológiai rendszerek, az állati populációk és emberi társadalmak, a gazdasági folyamatok rendszere, vagy az egyszerű részecskékből felépülő fizikai és kémiai rendszerek nagyon érdekes tulajdonsága, hogy az elemeik és kölcsönhatásaik nyilvánvaló eltérése ellenére makroszkópikus skálán a viselkedésük erős hasonlóságot mutat. Ez a megfigyelés arra hívja fel a figyelmet, hogy a kölcsönhatás dominanciája miatt az ilyen rendszerek makroszkópikus jellemzőit az elemeik kollektív viselkedése határozza meg, ami nem érzékeny a rendszer mikroszkópikus részleteire. Mai tudásunk szerint ezen rendszerek vizsgálatához a statisztikus fizika és komplex rendszerek fizikája, valamint az informatika számítógépes szimulációs módszerei szolgáltatják a megfelelő keretet.

Doktori munkám során a társadalmi- gazdasági rendszerekben végbemenő terjedési folyamatok modellezésével és elemzésével foglalkoztam.

Modellt dolgoztam ki a társadalmi- gazdasági rendszerekben lezajló információterjedés vizsgálatára. A modellben egyedek szociális hálózatát tekintve arra kerestem a választ, hogyan befolyásolja a terjedési folyamatot a vertikális és horizontális információs csatornák versengése, valamint a szociális hálózat topológiai jellemzői. Mind makro-, mind mikroskálán analitikus

számolásokkal és sejtautomata szimulációkkal elemeztem a rendszer időfejlődését és strukturális tulajdonságait.

A terjedési folyamat időfejlődését makroszkópikus skálán a már informált egyedek részarányával és annak idő szerinti deriváltjával jellemeztem. A rendszer egyedszintű, mikroszkópikus dinamikájából kiindulva egy integrálegyenletet adtam meg, amelynek megoldása szolgáltatja a makroszkópikus mennyiségek időfüggését. A mozgásegyenlet numerikus megoldásával azt találtam, hogy az információ terjedését a diffúziós folyamatoknál megfigyelt logisztikus görbe írja le [75]. Hatékony sejtautomata szimulációs programot fejlesztettem, amellyel részletesen elemeztem a rendszer egyedszintű dinamikáját is. A direkt szimulációval kapott eredmények kiváló egyezést mutatnak az integrálegyenlet megoldásával, amennyiben a rendszer fejlődését a külső információforrással szemben az egymás közötti információcsere dominálja.

A számítógépes szimulációk alapján a vertikális és horizontális információcsatornák versengése a következő terjedési dinamikát eredményezi: a külső információforrás hatására véletlenszerűen informált egyedek jelennek meg a rendszerben. A véletlen nukleációt követően az egyedek egymásközi kommunikációjának hatására informált egyedek növekvő klaszterei jönnek létre. A folyamatos nukleáció és növekedés miatt a rendszerben változatos méretű informált klaszterek vannak jelen, amelyek egy kritikus időpillanatban egy makroszkópikus, óriásklaszterré olvadnak össze. A rendszer mikrostruktúráját a klaszterek geometriai jellemzőivel illetve méreteloszlásukkal jellemeztem. Megállapítottam, hogy míg az informált egyedek kis klaszterei kompaktak, egy méret fölött fraktállá válnak. A klaszterek méreteloszlása a perkolációhoz hasonlóan hatványfüggvénynek bizonyult exponenciális levágással, de a kritikus exponens értéke szignifikánsan eltér a perkolációnál tapasztalttól. Az egyedek közötti hosszútávú kapcsolatok megjelenésével a méreteloszlás átmenetet mutat két különböző exponensű hatványfüggvény között. Numerikus és analitikus számolásaim alapján a két információs csatorna erősségét jellemző paramétersíkon megadtam a rendszer fázisdiagramját.

Rámutattam, hogy a rendszer klaszterstruktúrája jelentős hatással van az információ terjedésére: Ha az egyedek közötti kommunikáció a domináns, a klaszterek összeolvadása miatt erősen csökken a klaszterek szabad felülete, ahol az információáramlás történik. Ennek következményeként reguláris rácson az óriásklaszter megjelenésének pillanatában a terjedési folyamat drasztikusan lelassul. Ezt a lassulást az információ szolgáltatója csak úgy tudja ellensúlyozni, ha növeli a reklámtevékenység intenzitását, azaz erősíti a külső információs csatornát. Ugyanakkor a realisztikus komplex szociális hálókat vizsgálva a fenti jelenség sokkal kisebb mértékben jelentkezik, mert a hosszútávú kapcsolatok miatt a nagy klaszter felülete is nagy maradhat. Számítógépes szimulációkkal kimutattam, hogy az óriásklaszter megjelenésének t_c időpillanata a hálózat hosszútávú kapcsolatait kontrolláló újrakötési valószínűségnek logaritmikus függvényeként csökken.

Egyed alapú modellt dolgoztam ki úgynevezett hálózati technológiák társadalmi- gazdasági rendszerekben történő elterjedésének vizsgálatára. Ezek olyan technológiák, amelyek használati értékét elsősorban az határozza meg, hogy a technológiát már hányan használják. Ilyenek például a telekommunikációs technológiák, amelyek azzal a tulajdonsággal is rendelkeznek, hogy a piacon a felhasználók kommunikációs igényeinek kielégítésére egyszerre nagyon sok különböző technológiai színvonalú eszköz áll rendelkezésre. A terjedési folyamat mozgatórugója az egyedek azon törekvése, hogy kommunikációs költségeiket csökkentsék, ezért igyekeznek egymással kompatibilis technológiai szintű eszközöket használni.

Átlagtér közelítésben végzett számításokkal megmutattam, hogy a rendszer fejlődésének szempontjából csak a technológiák közötti relatív fejlettségbeli különbség a meghatározó, azok pontos értéke nem. Ezután mester-egyenlet megközelítést alkalmazva sikerült leírnom a rendszer diszkrét időfejlődését feltételezve, hogy a terjedés során a térbeli korreláció elhanyagolható. Meghatároztam a rendszer fixpontjait és elemeztem stabilitási tulajdonságait. Ezek a számítások rámutattak, hogy az egyedek másolás-elutasítás dinamikája minden esetben homogén végállapotba vezeti a rendszert, ahol

egyetlen technológia válik dominánssá. Megállapítottam, hogy bizonyos kezdeti piaci részesedés esetén a technológiák közötti versengés nagyon kiélezett lehet, amit a rendszer relaxációs idejének divergenciája jellemez.

Számítógépes szimulációk segítségével kimutattam, hogy az időfejlődés során az egyedek azonos technológiai szintű klasztereket formálnak. A klaszterek méreteloszlása az időfejlődés során exponenciális függvényalakból indulva hatványfüggvényhez konvergál, majd a közel homogén végállapotban az összes egyed egyetlen klasztert alkot. Kivételt képez az az eset, amikor a fejlettebb technológiák nem nyújtanak elegendő előnyt a fejletlenebbekkel szemben. Ilyenkor a rendszer befagy egy nemtriviális klaszterszerkezetbe, ahol a technológiai szintek valószínűségi eloszlása Gauss eloszlással jellemezhető. Amennyiben a fejlettebb technológia birtoklása kedvező az egyedek számára, nagyon érdekes eredményként azt találtam, hogy a technológiai szintek valószínűség eloszlása komplex időfejlődésen megy keresztül, amit úgynevezett extrém statisztikákkal [94] lehet leírni. A rendszer globális technológiai fejlettségét az egyedek által használt technológiák átlagos színvonalával jellemeztem. Az átlagos technológiai szint az idő múlásával egy konstanshoz konvergál, amelynek értékét a költségfaktor határozza meg.

A négyzetrácon és átlagtér közelítésben végzett számítások mellett, analitikus eszközökkel és számítógépes szimulációval elemeztem, hogyan befolyásolja a terjedési folyamatot az egyedek szociális hálózatának topológiája, valamint több szolgáltató jelenléte a piacon.

A szociális kapcsolati háló szerkezeti jellemzőinek változtatásával sikerült rámutatnom, hogy az egyedek kapcsolódásai döntő fontosságúak a terjedés szempontjából. Kimutattam, hogy a szociális hálóban jelenlévő hosszútávú kapcsolatok a költségjellegű paraméterektől függően csökkenthetik, de akár növelhetik is a rendszer által a homogén végállapotban elért átlagos technológiai szintet, más szóval segíthetik, de akár hátráltathatják is a terjedést. Ennek ismerete reklámstratégiák tervezésénél fontos szerepet játszhat.

A modell alkalmazásaként megvizsgáltam, milyen feltételek mellett képes egy innováció, azaz újonnan bevezetett, magasabb szintű technológia el-

terjedni egy alacsonyabb technológiai szintű, homogén környezetben. Megállapítottam, hogy az új technológia kezdeti piaci betörésének létezik egy kritikus értéke, amely alatt nem képes terjedni. A kritikus értéket átlépve az egyedek fokozatosan átveszik az új technológiát és a rendszer egy magasabb technológiai szintű homogén állapotba konvergál. Kimutattam, hogy a terjedéshez szükséges kezdeti kritikus jelenléti arány erősen függ a kapcsolati háló topológiájától. A kritikus pontban a terjedés karakterisztikus idejének maximuma van, amelynek értékét arányos a hálózat átmérőjével.

A modellt továbbfejlesztettem több szolgáltató jelenlétének vizsgálatára azzal a feltevéssel, hogy a különböző szolgáltatóhoz tartozó egyedek kommunikációja az erősebb inkompatibilitás miatt extra költséggel jár. A kiterjesztett modell analitikus és szimulációs vizsgálatával megmutattam, hogy a több szolgáltató okozta versengés érzékenyebbé teszi a rendszert a magasabb technológiai szint által nyújtott előnyökre. Érdekes eredményként azt találtam, hogy a szolgáltatók segíthetik, de akár gátolhatják is a technológiai fejlődést. Amikor az egyes szolgáltatók által nyújtott termékek technológiai színvonala is elkülönül egymástól, analitikusan meghatároztam a szolgáltatóváltás feltételét. Az utóbbi eredmény kiaknázható a gyakorlatban olyan piaci körülmények között, mint például, amikor egy gyártó egy új csúsmobiltelefon forgalmazására kizárólagos szerződést köt egy szolgáltatóval.

7. fejezet

Discussion

Understanding the behavior of systems containing many interacting agents is in the center of intensive research in numerous scientific fields. It is a very interesting common property of biological systems, animal populations, human societies, systems of economic processes and physical or chemical systems built from simple particles, that despite the obvious difference of their agents, and interactions, their behavior on the macroscopic level show a high degree of similarity. This observation points out, that because of the dominance of the interactions, the macroscopic properties of such systems are mostly driven by the collective behavior of their elements. These behaviors are not sensitive to the microscopic details of the system. The state of our current knowledge shows, that the most convenient tools to study these systems are provided by statistical physics, physics of complex systems, and the powerful numerical simulation methods of computer science. During my work as a Ph.D. student I modeled and studied the spreading processes in socio-economic systems.

I worked out a model of information spreading in socio-economic systems. With the model observing a social network of agents I studied how the competition of vertical and horizontal information channels and the underlying network topology affect the the spreading process. I analyzed the time evolution of the system and its structural properties using analytical

calculations and numerical simulations both on the micro-, and the macro-scale.

On the macroscopic scale I described the time evolution of the spreading process by the ratio of informed agents in the system, and by the spreading intensity. From the microscopic dynamics of the agents I introduced an integral equation. The solution of it shows the time dependence of the macroscopic properties. I found that the spreading of the information can be described by the logistic curve form, observed in other diffusion processes as well[75]. I created an efficient cellular automata simulation program, with which I analyzed the system's dynamics on the level of agents as well. The results of the direct simulation perfectly matched to the analytical predictions of the integral equation if the information spreading is dominated by the inner instead of the outer information channel.

Based on the computer simulations it turned out, that the competition of the horizontal, and the vertical information channels imply the following dynamics of spreading: As a result of the outer information source, informed agents appear randomly in the system. After this nucleation process, as a result of the inter-agent communication growing clusters of informed agents appear. Because of the ongoing nucleation and the growing, there are clusters of different sizes in the system. At a critical time t_c these clusters merge into a macroscopic giant cluster. I described the microstructure of the system by the geometrical properties and the size distribution of the clusters. I found that while small clusters of informed agents are usually compact, above a specific size they turn to fractals. The size distribution of the clusters follows a power law behavior with exponential cutoff just like in the case of percolation. However it is important to note, that the critical exponent significantly differ from the traditional one. As long range connections appear between the agents, the size distribution shows a crossover between two power law functions with different exponents. Using the results of my analytical calculations, and numerical simulations I presented the phase diagram of the system on the parameter plain describing the strength of the

two information channels.

I showed that the cluster structure of the system has a remarkable effect on the information: If the communication between agents dominates, the free surface of the clusters – where the information spreads – rapidly decreases because of the merging of the clusters. As a result, on a regular lattice at the critical time t_c the spreading process dramatically slows down. This slowing can be compensated by increasing the intensity of marketing efforts, thus strengthening the outer information channel. However in the case of more realistic complex social networks the above phenomenon does not appear that much. The reason is that because of the long range connections in the system the surface of the giant cluster can stay large. I showed by computer simulations that the critical point of time t_c , when the giant cluster appears is in logarithmic dependence with the rewiring probability, that controls the amount of long range connections in the system.

I proposed a model of the spreading of the so called networking technologies in socio-economic systems. The usability of these technologies highly depend on the amount of users already use them. As an example, telecommunication technologies may be mentioned. These have the property that their users use devices of many different technological levels to satisfy their needs of communication. The main driving force of the spreading process is the aim of the agents to minimize their costs of communication. To reach this they always try to use technologies that are compatible with the others'.

As a result of mean field calculations I showed that the time evolution of the system does not depend on the exact values of the cost parameters describing the amount of the advantages provided by the more advanced technologies. Only the ration of them affects the spreading. I described the discrete time evolution of the system using a master equation approach with the condition that the spatial correlation during the spreading process can be omitted. I found the fix-points of the system, and analyzed the stability properties of them. These calculations pointed out, that the copying-declining dynamics of the agents always leads the system into a homogeneous state,

where one technology becomes dominant. I found that with some specific starting conditions for the concentration of the different technologies, the competition of them can be very fierce. This is indicated by the divergence of the system's relaxation time.

With computer simulations I showed, that during the time evolution, the agents form clusters of the same technological level. As time elapses, the size distribution of the clusters converge to a power law form from the previous exponential one. near to the homogeneous final state all agents join to one cluster. the only exceptional case is when the more advanced technologies do not provide advantages to the users compared to the less advanced ones. In this case the system freezes to a non-trivial cluster structure, where the probability distribution of the technological levels can be described by a Gaussian distribution. When using more advanced technologies provide advantages to the users, I found that the probability distribution of technological levels goes through a complex time evolution. It is very interesting to note, that this evolution can be followed by extreme order statistics[94]. The global level of technological progression is described by the average technological level of technologies used by the agents. With time, this average converges to a constant value, that is controlled by the cost factor.

Among the analytical calculations and the simulations on square lattice, I analyzed the effect of the change of the social network's topology and the presence of more than one providers. I used again analytical and numerical tools as well.

Analyzing the structural properties of the social network I showed, that the connections of the agents play a key role in the spreading. I found that the long range connections in the system can raise, but also can lower the average final technological level reached by the system in its final state. This behavior depends on the value of the cost factor. In other words, these connections can help, but also can hinder the spreading. This result may be useful when planning advertising strategies for new products.

As a possible application of the model I analyzed the conditions of sprea-

ding for a new innovation i.e. a newly introduced higher level technology, surrounded by homogeneous environment of lower level technologies. I found that a critical minimal concentration of the new technology exists below which the new technology can not spread. Above this critical concentration however, the agents adopt the new technology and the system converges to a state of a higher level of average technology. I showed that the critical concentration highly depends on the topology of the social network. At the critical point the characteristic time of the spreading has a maximum. The value of this is proportional to the diameter of the network.

I modified the model in order to analyze the presence of more than one providers. In this case I assumed that the communication between agents of different providers require extra costs because of the increased incompatibility. From the analytical and numerical studies I found that the competition of more than one providers makes the system more sensitive to the advantages, a more advanced technology may provide. As an interesting result I found, that the providers may help, but also can hinder the technological evolution. I calculated the conditions of changing the provider of an agent in the case, when the technological level of agents are connected to providers. These results may be applicable in such cases when a producer would like to give exclusive selling rights of a new mobile-phone to a given provider.

Irodalomjegyzék

- [1] Stauffer, D. (2004) Introduction to statistical physics outside physics. *Physica A*, **336**, 1–5.
- [2] Galam, S., Gefen, Y., and Shapir, Y. (1982) Sociophysics: a mean behavior model for the process of strike. *J. Math. Social.*, **9**, 1–13.
- [3] Galam, S. (2003) Sociophysics: a personal testimony. *Physica A*, **336**, 49–55.
- [4] French, J. R. P. (1956) A formal theory of social power. *Psychological Review*, **63**, 181–194.
- [5] Hegselmann, R. and Krause, U. (2002) Opinion dynamics and bounded confidence: models, analysis and simulation. *J. Art. Soc. Soc. Sim.*, **5**, 3.
- [6] Lenz, W. (1920) Beitrag zum verständnis der magnetischen eigenschaften in festen körpern. *Physik. Z.*, **21**.
- [7] Ising, E. (1925) Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. *Physik. Z.*, **31**.
- [8] Brush, S. (1967) History of the Lenz-Ising model. *Reviews of Modern Physics*, **39**.
- [9] Stauffer, D. (2002) Monte Carlo simulations of Sznajd models. *J. Artif. Soc. Soc. Simulation*, **5**, 1.

-
- [10] Sznajd-Weron, K. (2005) Sznajd model and its applications. *Acta Phys. Pol. B*, **36**, 2537.
- [11] Wiedlich, W. (1971) The statistical description of polarization phenomena in society. *Br. J. Math. Statist. Psychol.*, **24**, 251–266.
- [12] Callen, E. and Shapion, D. (1974) A theory of social imitation. *Phys. Today*, **7**, 23–28.
- [13] Kling, R. (1999) What is social informatics and why does it matter? *D-Lib Magazine*, **5**.
- [14] Rogers, E. M. (1962) *Diffusion of Innovations – first edition*. The Free Press.
- [15] Strang, D. and Soule, S. A. (1998) Diffusion in organizations and social movements: From hybrid corn to poison pills. *Annual Review of Sociology*, **24**, 265–290.
- [16] Dearing, J. W. and Kreuter, M. W. (2010) Designing for diffusion: How can we increase uptake of cancer communication innovations? *Patient Educ Couns*, **81**, S100–S110.
- [17] Katz, E. (1962) Notes on the unit of adoption in diffusion research. *Sociological Inquiry*, **32**, 3–9.
- [18] Katz, E. (1999) Theorizing diffusion: Tarde and Sorokin revisited. *Annals of the American Academy of Political and Social Science*, **566**, 144–155.
- [19] Gilbert, N. (2008) *Agent-based models*. Sage Publications.
- [20] Scott, J. (2000) *Social Network Analysis: A Handbook 2nd ed.*. Sage.
- [21] Wasserman, S. and Faust, K. (1994) *Social Network Analysis*. Cambridge University Press.

-
- [22] Palchykov, V., Kaski, K., Kertész, J., Barabási, A.-L., and Dunbar, R. I. M. (2012) Sex differences in intimate relationships. *Nature - Scientific Reports*.
- [23] Barabási, A.-L. (2002) *Linked*. Perseus Publishing.
- [24] Netvizz app. in facebook url: <http://apps.facebook.com/netvizz/>.
- [25] Vattay, G., Fekete, A., Stéger, J., and Maródi, M. (2002) Modeling competition, fairness and chaos in computer networks. *IASTED Conference of Communications, Internet and Information Technology*, pp. 376–805.
- [26] Éltető, T., Stéger, J., Vadera, P., and Vattay, G. (2002) A simple traffic model for web-like tcp connections. *Highspeed Networks Conference*.
- [27] Holme, P. and Huss, M. (2011) Understanding and exploiting information spreading and integrating information technologies. *Journal of Computer Science and Technology*, **26**, 829–836.
- [28] Krapivsky, P. L., Redner, S., and Volovik, D. (2011) Reinforcement-driven spread of innovations and fads. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2011**, P12003.
- [29] von Neumann, J. (1948) The general and logical theory of automata. *L.A. Jeffress (Ed.). Cerebral Mechanisms in Behavior*, pp. 1–41.
- [30] Macal, C. M. and North, M. J. (2010) Tutorial on agent-based modelling and simulation. *Journal of Simulation*, **4**, 151–162.
- [31] Cederman, L.-E. (1997) *Emergent actors in world politics: How states and nations develop and dissolve*. NJ: Princeton University Press.
- [32] Schelling, T. C. (1971) Dynamic models of segregation. *Journal of Mathematical Sociology*, **1**, 143–186.
- [33] Schelling, T. C. (1978) *Micromotives and macrobehavior*. Norton.

-
- [34] Gerholda, S., Glebskyc, L., Schneiderb, C., Weissd, H., and Zimmermannb, B. (2008) Computing the complexity for Schelling segregation models. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **13**.
- [35] Singha, A., Vainchteinb, D., and Weissd, H. (2011) Limit sets for natural extensions of Schelling's segregation model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**.
- [36] Grauwina, S., Goffette-Nagota, F., and Jensena, P. (2012) Dynamic models of residential segregation: An analytical solution. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **96**.
- [37] Fagioloa, G., Valenteb, M., and Vriend, N. J. (2005) Segregation in networks. *Journal of Economic Behavior and Organization*, **64**.
- [38] Espericueta, R. (1997) *Cellular automata dynamics*. Bakerfield College.
- [39] Wolfram, S. (2002) *A New Kind of Science*. Wolfram Media, Inc.
- [40] Gardner, M. (1970) Mathematical games – the fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "Life". *Sci. Am.*, pp. 120–123.
- [41] Schönfisch, B. and de Roos, A. Synchronous and asynchronous updating in cellular automata.
- [42] Newman, M. E. J. (2003) The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, **45**, 167–256.
- [43] Erdős, P. and Rényi, A. (1959) On random graphs. *Publ. Math Debrecen*, **6**, 290–297.
- [44] Watts, D. J. and Strogatz, S. H. (1998) Collective dynamics of "small-world" networks. *Nature*, **393**, 440–442.
- [45] Chen, Q., Bae, S. C., and Granick, S. (2011) Directed self-assembly of a colloidal kagome lattice. *Nature*, **469**.

-
- [46] Seeley, T. (1996) *Wisdom of the Hive*. Harvard University Press.
- [47] Füredi, Z. (1983) Graphs without quadrilaterals. *Journal of Combinatorial Theory*, **34**.
- [48] Erdős, P. and Rényi, A. (1960) On the evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat Kutató Int. Közl.*, **5**, 17–61.
- [49] Newman, M. E. J., Watts, D. J., and Strogatz, S. H. (2002) Random graph models of social networks. *PNAS*, **99**, 2566–2572.
- [50] Molloy, M. and Reed, B. (1995) A critical point for random graphs with a given degree sequence. *Random Structures Algorithms*, **6**, 161–179.
- [51] Molloy, M. and Reed, B. (1998) The size of the giant component of a random graph with a given degree sequence. *Combin. Probab. Comput.*, **7**, 295–305.
- [52] Rapoport, A. (1957) Contribution to the theory of random and biased nets. *Bull. Math. Biophys.*, **19**, 257–277.
- [53] Solomonoff, R. and Rapoport, A. (1951) Connectivity of random nets. *Bull. Math. Biophys.*, **13**, 107–117.
- [54] P-Satorras, R., Rubi, M., and Diaz-Guilera, A. (2003) *Statistical Mechanics of Complex Networks, Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag.
- [55] Albert, R. and Barabási, A.-L. (2002) Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 47.
- [56] Elgazzar, S., A. (2003) Applications of small-world networks to some socio-economic systems. *Physica A*, **324**, 402–407.
- [57] Albert, R. and Barabási, A.-L. (1999) Diameter of the World-Wide Web. *Nature*, **401**, 130–131.
- [58] Holme, P., Kim, B. J., Yoon, C. N., and Han, S. K. (2001) Attack vulnerability of complex networks. *Physical Review E*, **65**.

-
- [59] Palla, G., Barabási, A.-L., and Vicsek, T. (2002) Quantifying social group evolution. *Nature*, **446**, 664–667.
- [60] Aldridge, C. H. (2005) Methods for creating scale-free networks without resorting to global knowledge (conference paper). *Spatial Information Research Centre*.
- [61] Dorogovtsev, S. N., Mendes, J. F. F., and Samukhin, A. N. Growing network with heritable connectivity of nodes. *cond-mat.stat-mech*.
- [62] Valverde, S., Solé, R. V., Bedau, M. A., and Packard, N. (2007) Topology and evolution of technology innovation networks. *Phys. Rev. E*, **76**, 056118.
- [63] Stauffer, A. T. B. D. and Kertész, J. (2002) Election results and the Sznajd model on Barabási network. *Eur. Phys. J.*, **B 25**, 123–127.
- [64] Goh, K.-I., Kahng, B., and Kim, D. (2001) Universal behavior of load distribution in scale-free networks. *Physical Review Letters*, **87**.
- [65] Lou, J. and Ruggeri, T. (2010) The dynamics of spreading and immune strategies of sexually transmitted diseases on scale-free network. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **365**, 210–219.
- [66] Yu-rong¹, S. and Guo-ping, J. (2010) Epidemic spreading on scale-free networks with diversity of node anti-attack abilities. *The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications*, **17**, 73–76.
- [67] Zhang, H. and Fu, X. (2009) Spreading of epidemics on scale-free networks with nonlinear infectivity. *Nonlinear Analysis*, **70**, 3273–3278.
- [68] Kullmann, L. and Kertész, J. (2001) Preferential growth: Solution and application to modelling stock market. *Physica A*, **299**, 121–126.
- [69] Newman, M. E. J. (2001) Scientific collaboration networks. I. Network construction and fundamental results. *Physical Review E*, **64**.

-
- [70] Barabási, A., Jeonga, H., Neda, Z., Ravasz, E., Schubert, A., and Vicsek, T. (2002) Evolution of the social network of scientific collaborations. *Physica A*, **311**, 590–614.
- [71] Grassberger, P. (1984) Chaos and diffusion in deterministic cellular automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **10**, 52–58.
- [72] Guardiola, X., Díaz-Guilera, A., Pérez, C. J., Arenas, A., and Llas, M. (2002) Modeling diffusion of innovations in a social network. *Phys. Rev. E*, **66**, 026121.
- [73] Llas, M., Gleiser, P. M., López, J. M., and Díaz-Guilera, A. (2003) Nonequilibrium phase transition in a model for the propagation of innovations among economic agents. *Phys. Rev. E*, **68**, 066101.
- [74] Helbing, D., Treiber, M., and Saam, N. J. (2005) Analytical investigation of innovation dynamics considering stochasticity in the evaluation of fitness. *Phys. Rev. E*, **71**, 067101.
- [75] Mahajan, V. and Peterson, R. A. (1985) *Models for Innovation Diffusion*. Sage Publications.
- [76] Castellano, C., Fortunato, S., and Lorento, V. (2009) Statistical physics of social dynamics. *Reviews of modern physics*, **81**, 591–646.
- [77] Ryan, G. (1943) The diffusion of hybrid seed corn in two iowa communities. *Rural Sociology*, **8**.
- [78] Ruiz, R. M., Albuquerque, E., Ribeiro, L. C., and Bernardes, A. T. (2005) Modelling the role of national system of innovation in economical differentiation. *AIP Conf. Proc.*, **779**, 162–166.
- [79] Moldovan, S. and Goldenberg, J. (2004) Cellular automata modeling of resistance to innovations: Effects and solutions. *Technological Forecasting and Social Change*, **71**, 425–442.

-
- [80] Kocsis, G. and Kun, F. (2011) Competition of information channels in the spreading of innovations. *Physical Review E*, **84**.
- [81] Solomon, S., Weibuch, G., Arcangelis, L., Jan, L., and Stauffer, D. (2000) Social percolation models. *Physica A*, **277**.
- [82] Silvenberg, G. and Verspagen, B. (2005) A percolation model of innovation in complex technology spaces. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **29**, 225–244.
- [83] Proykova, R. and Stauffer, D. (2002) A market of inhomogeneous threshold cellular automata. *Physica A*, **312**.
- [84] Arenas, A., Diaz-Guilera, A., Pérez, C. J., and Vega-Redondo, F. (2000) Self-organized evolution in a socioeconomic environment. *Phys. Rev. E*, **61**, 3466.
- [85] Hu, H.-B. and Wang, X.-F. (2009) Discrete opinion dynamics on networks based on social influence. *J. Phys. A*, **42**.
- [86] Weidlich, W. (2000) *Sociodynamics*. Dover Publications.
- [87] Vicsek, T. (1989) *Fractal Growth Phenomena*. World Scientific Co. Pte. Ltd.
- [88] Stauffer, D. and Aharoni, A. (1994) *Introduction to percolation theory*. Taylor and Francis.
- [89] Kun, F., Kocsis, G., and Farkas, J. (2007) Cellular automata for the spreading of technologies in socio-economic systems. *Physica A*, pp. 660–670.
- [90] Kocsis, G. and Kun, F. (2008) The effect of network topologies on the spreading of technological developments. *J. Stat. Mech*, **P10014**.

-
- [91] Kocsis, G. and Kun, F. (2011) *Cellular Automata Modelling of the Diffusion of Innovations Chapter 16. in Cellular Automata Modelling of the Diffusion of Innovations*. Intech Publishing.
- [92] Sornette, D. (2000) *Critical Phenomena in Natural Sciences – second edition*. Cambridge Springer.
- [93] Klimek, P., Lambiotte, R., and Thurner, S. (2008) Opinion formation in laggard societies. *Eur. Phys. Lett.*, **82**.
- [94] Lamperti, S. (1964) On extreme order statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, **35**.
- [95] V, K. and U, K. (1992) Innovation diffusion: Some new technological substitution models. *Journal of Mathematical Sociology*, **17(2-3)**, 175–194.